前 言

目前，国内有关解析几何这门重要基础学科的教科书、参考书及各种习题集虽然不少，但以论述解析几何解题方法为主的参考书，尚不多见，这似乎是一种缺陷和不足。因为，随着我国教育体制改革的不断深化，高等教育尤其是各类成人高等教育发展十分迅速，广大师生以及广大工程技术人员，甚至社会科学工作者，都急需掌握解析几何这门应用极为广泛的基础性学科的方法和技巧，但由于没有合适的参考书，给教学和自学带来许多不便，直接影响了教学质量的提高，为此编写了这本专门论述解析几何解题方法与技巧的参考书。

本书用大量的典型实例揭示了解析几何的解题规律和技巧，归纳、总结了解析几何的常用解题方法。全书共9章，各章自成体系，包括了解析几何这门学科的全部经典内容。在章节安排上不拘于通常的逻辑次序，每一方法都独立成节，并按照“基本内容”、“常用方法及应用举例”及“练习”这三步曲逐步展开。“基本内容”是必须掌握的基本概念和基本定理（为节省篇幅，大多定型的证明均略去）；“常用方法及应用举例”是解决各类问题的方法的系统归纳和总结，用典型例题揭示方法的运用技巧和应注意的事宜，并用评注的形式说明例题的类型和方法的适用范围。书中有些问题还用多种方法予以解决，并比较方法的优劣，以达到举一反三、触类旁通之目的。作者对本书大部分例题都给出了解题的思路和思维的方法。另外，

各章编写的具体格式，又因其内容而定，并不强求一律。

作者虽然为本书取得理想的效果作了不少努力，但限于水平，加之是初次尝试，时间仓促，难免有处理不当与片面之处，热诚欢迎广大读者批评指正。

编　者

1994 年 2 月

目　录

第1章 直　　线

利用坐标方法把几何问题转化为代数问题，并通过代数问题的研究来解决几何问题，是解析几何学的基本方法. 本章的目的就是要用坐标的方法来研究平面直线及其之间的关系.

§1.1 两点间的距离与线段定比分点

一、基本内容

1. 两点间的距离

设 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$是坐标平面上的两点，则 P_1 与 P_2 间的距离与两点的坐标有如下关系

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad (1.1-1)$$

显然，在两点 P_1 与 P_2 的距离公式中，P_1、P_2 具有对称性.

2. 线段的定比分点

设 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$是坐标平面上的两点，点 P 分线段 P_1P_2 的比为：$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$，则 P 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \quad (1.1-2)$$

特别地，当 $\lambda=1$ 时，$x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y=\frac{y_1+y_2}{2}$，这就是中点坐标公式.

3. 三角形的面积公式

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$为坐标平面上不共线

的三点，则$\triangle ABC$的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (1.1-3)$$

以A、B、C顺序为顺时针方向时，求出的面积值为负；而当A、B、C顺序为逆时针方向时，面积值为正. 所以，在求三角形面积时，一般要加一个绝对值符号.

对于A、B、C三点共线，面积公式同样适用，只是面积为零，反之亦成立.

二、常用方法及应用举例

例1 已知平面上三点$A(1,2)$、$B(a,6)$、$C(2,-8)$，$|AB|=5$，且B点在第一象限，求$|BC|$.

解

$\because |BC|=\sqrt{(2-a)^2+(-8-6)^2}$

$\quad\quad =\sqrt{(2-a)^2+196}$

$\therefore$，要求$|BC|$，只要求出a即可，由于

$$|AB|=5=\sqrt{(a-1)^2+(6-2)^2}$$

所以，$a=4$或$a=-2$，但已知B在第一象限，所以$a=4$，故

$$|BC|=\sqrt{(2-4)^2+196}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$$

评注 本例解答关键是根据$|AB|=5$求出a，并由B的象限确定a取正值.

例2 已知平面上三点A、B、C的坐标分别是$(-2,-2)$、$(3,3)$、$(5,-2)$，判断A、B、C是否共线，若不共线，求$S_{\triangle ABC}$，并判断$\triangle ABC$的形状.

分析 本例首先要判定A、B、C三点是否共线，不共线

时，又要求 $S_{\triangle ABC}$，因而可直接求 $S_{\triangle ABC}$，由其是否为零来判定 $S_{\triangle ABC}$是否共线.

解

$$S_{\triangle ABC}=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-2 & -2 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 5 & -2 & 1\end{vmatrix}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2}\times(-35)\right|=17.5$$

显然，A、B、C 三点不共线.

又 $|AB|^2=[3-(-2)]^2+[3-(-2)]^2=25+25=50$

$|BC|^2=(5-3)^2+(-2-3)^2=4+25=29$

$|CA|^2=(-2-5)^2+[-2-(-2)]^2=49$

因为，$|AB|$、$|BC|$、$|CA|$ 皆不相等，且有最长边，$|AB|^2<|BC|^2+|CA|^2$，故$\triangle ABC$ 是锐角三角形，不是等腰三角形.

评注 本例也可先计算 $|AB|$、$|BC|$、$|CA|$，并由它们的关系判定 A、B、C 是否共线.

例 3 已知 P 是矩形 $ABCD$ 所在平面上的任意一点，求证：$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$.

分析 由于矩形相邻两边都是互相垂直的，因而可以取其一个顶点为坐标原点，相邻两边所在直线分别作为 x 轴和 y 轴见图 1—1.

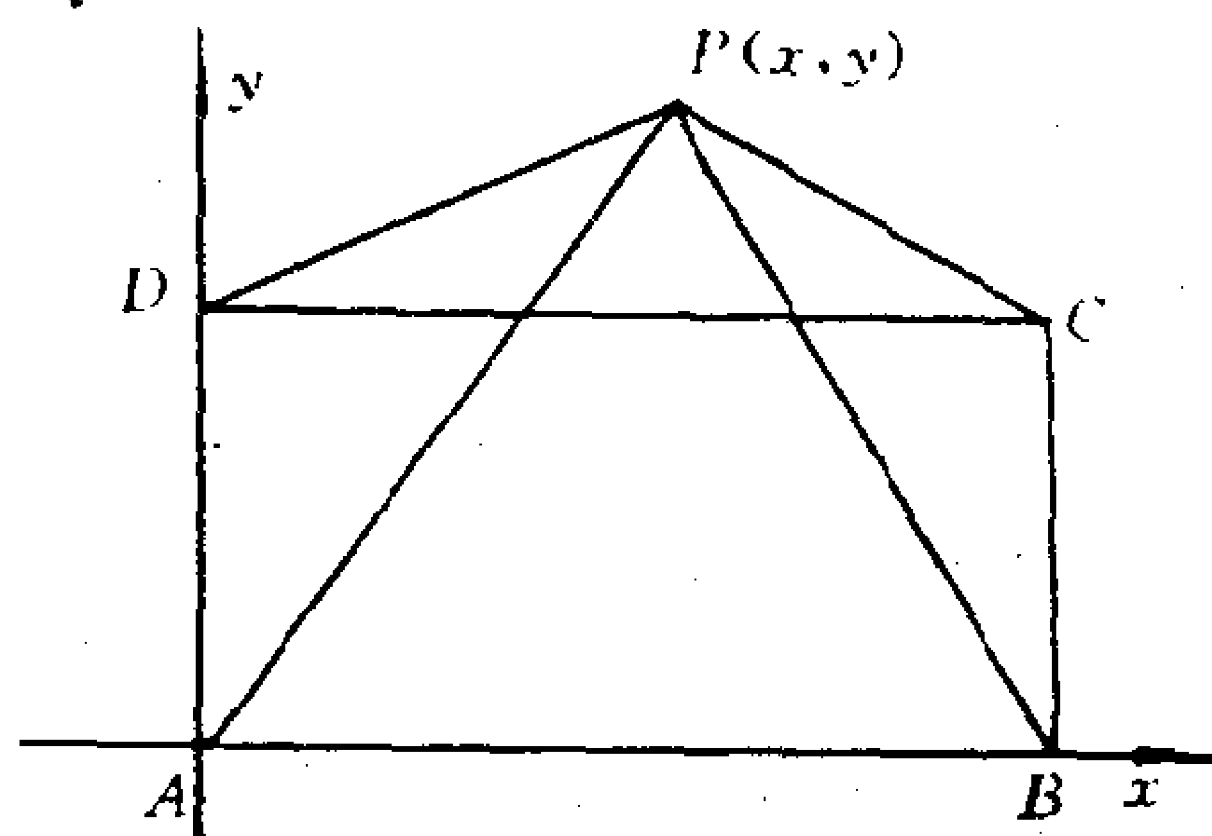


图 1—1

证明 取矩形 AB 边所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴，并设矩形相邻两边

AB、AD 的长分别为 a、b，点 P 的坐标为 (x,y)，则有 $A(0,0)$，$B(a,0)$，$C(a,b)$，$D(0,b)$，故

$$PA^2+PC^2=(x^2+y^2)+[(a-x)^2+(b-y)^2]$$
$$=2(x^2+y^2-ax-by)+a^2+b^2$$
$$PB^2+PD^2=[(a-x)^2+y^2]+[x^2+(b-y)^2]$$
$$=2(x^2+y^2-ax-by)+a^2+b^2$$
$$\therefore PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$$

例 4　已知 $A(1,3)$、$B(4,6)$，求分点 P，使 $AB=3PB$.

解　$\because AB=AP+PB$，而 $AB=3PB$，

$\therefore AP+PB=3PB$，于是

$$AP=2PB$$
$$\therefore \lambda=\frac{AP}{PB}=\frac{2PB}{PB}=2$$

故
$$x=\frac{1+2\times 4}{1+2}=3, y=\frac{3+2\times 6}{1+2}=5$$

所以，$P(3,5)$ 是要求的分点.

评注　关键是求出 $\lambda=2$.

例 5　见图 1—2，已知三角形顶点为 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，求 $\triangle ABC$ 的重心的坐标 (x,y)。

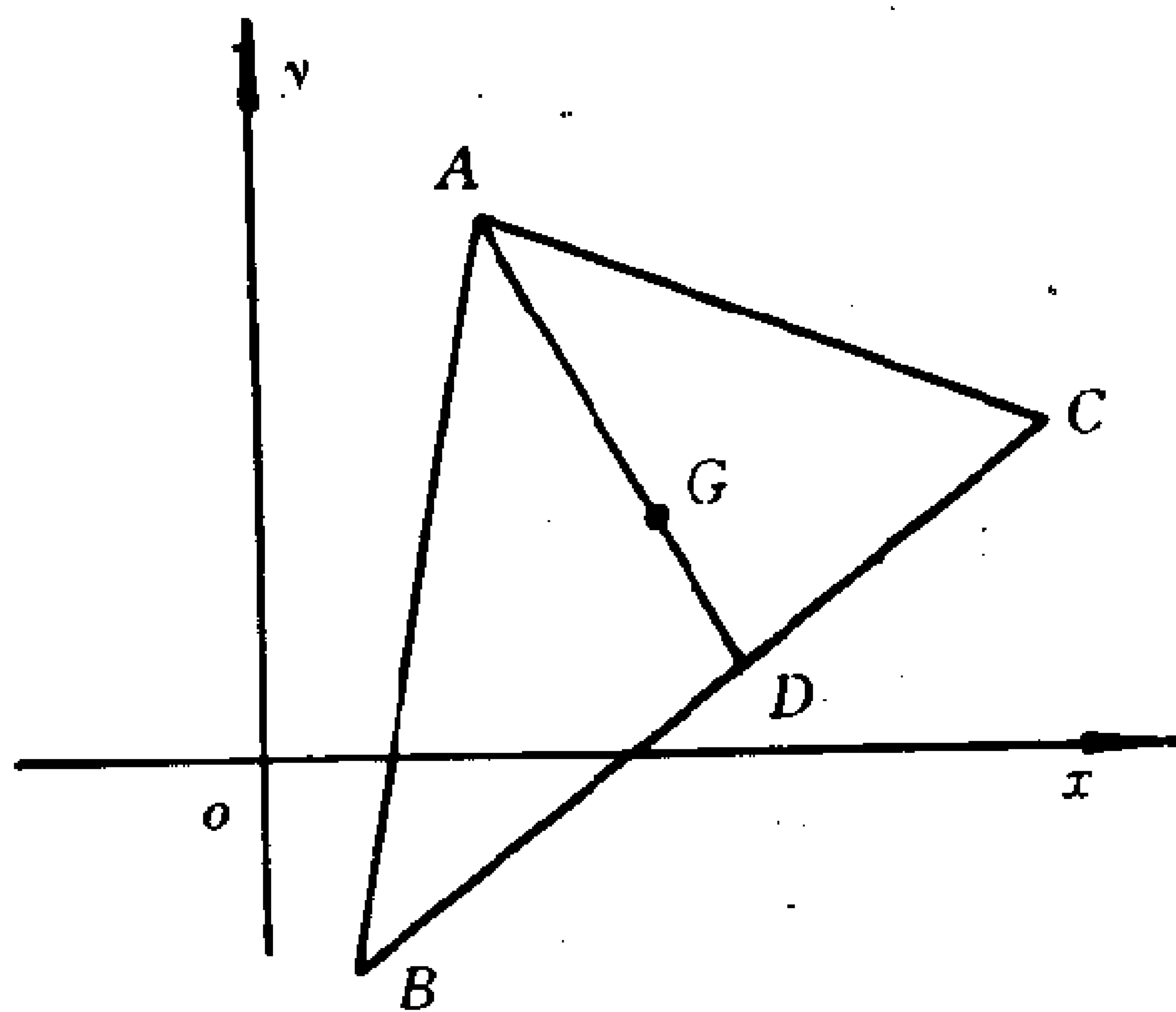


图 1—2

解　设 BC 边的中点为 D，由中点坐标公式，则

D 点的坐标为$(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2})$

又设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 G 分线 AD 的比 $\lambda=\frac{AG}{GD}=2$，所以 G 点的坐标是

$$x=\frac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

即重心 G 点的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3} \quad (1.1—4)$$

评注 本例推得的结果可以作公式应用.

习 题 1.1

1. 已知某零件一个面上有 3 个孔，孔中心的坐标分别为：$A(-10,30)$、$B(-2,3)$、$C(0,-1)$，求每两孔中心的距离，并判断 A、B、C 是否共线.

2. 三角形的三个顶点是 $A(2,1)$、$B(-2,3)$、$C(0,-1)$，求 $S_{\triangle ABC}$，并判断$\triangle ABC$ 是否是等腰三角形.

3. 已知 $A(1,-1)$、$B(3,3)$、$C(4,5)$，用两种方法证明 A、B、C 共线.

4. 在$\triangle ABC$ 中，AM 是 BC 边上的中线，求证 $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$.

5. 已知两点 $P_1(3,2)$、$P_2(-9,4)$，点 $P(x,0)$在 P_1P_2 所在的直线上，求 P 点分 P_1P_2 所成的比 λ 及 x 值.

6. 已知$\triangle ABC$ 的二顶点 $A(2,3)$、$B(8,-4)$和重心 $G(2,-1)$，求 $C(x,y)$.

7. 线段 P_1P_2 长 5cm，写出点 P 分 P_1P_2 所成的比 λ 值：

(1)点 P 在 P_1P_2 上,求 $|P_1P|=3\text{cm}$;

(2)点 P 在 P_1P_2 延长线上,$|P_2P|=10\text{cm}$;

(3)点 P 在 P_2P_1 延长线上,$|PP_1|=1\text{cm}$.

8.(1)一条线段的两个端点坐标为$(-1,2)$、$(-10,-1)$,求这条线段的二个三等分点的坐标;

(2)已知点$A(1,-1)$,$B(-4,5)$,将线段AB延长至C,使$AC=5|AB|$,求C点的坐标.

§1.2 直线方程的几种形式

一、基本内容

1. 直线的斜率

一条直线 l 向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角叫做这条直线的倾斜角.若直线 l 平行于 x 轴,规定它的倾斜角为零,因此,对任一直线它的倾斜角 α 的取值范围是:$0\leqslant\alpha<\pi$.

一直线倾斜角的正切,叫做该直线的斜率,常用 k 表示斜率:$k=\text{tg}\alpha$.

应当指出的是,平行于 x 轴的直线,其斜率为零,垂直于 x 轴的直线斜率不存在.

设 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$所在直线的斜率为 k,则有

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (1.2—1)$$

在式(1.2—1)中,P_1、P_2 两点具有对称性.

2. 点斜式

已知直线 l 过定点 $P(x_1,y_1)$,斜率为 k,直线 l 的方程是

$$y-y_1=k(x-x_1) \qquad (1.2—2)$$

3. 两点式

已知直线过两点 $P_1(x_1,y_1)$和 $P_2(x_2,y_2)$,直线 l 的方程

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (1.2—3)$$

特别地，当 $x_1=x_2$ 时，方程为 $x=x_1$；当 $y_1=y_2$ 时，方程为 $y=y_1$.

4. 截斜式

已知直线的斜率是 k，在 y 轴上截距是 b，即和 y 轴交于 $P(0,b)$，直线 l 的方程是

$$y=kx+b \qquad (1.2—4)$$

5. 截距式

已知直线 l 在 x 轴和 y 轴的截距分别是 a 和 $b(a、b\neq 0)$，直线 l 的方程是

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (1.2—5)$$

6. 一般式

定理 1.2.1 在坐标平面内，任何直线都可用含有变量 x 和 y 的一次方程 $Ax+By+C=0$ 来表示. 反之，任何含有变量 x 和 y 的一次方程 $Ax+By+C=0$ 都表示坐标平面内的一条直线.

方程 $Ax+By+C=0$ 称为直线的一般式方程.

二、常用方法及应用举例

例 1 已知下列各条件，建立直线方程，并将它们化为一般式.

(1) 过点 $(9,-3)$，倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$；

(2) 在 y 轴上的截距为 -2，倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$；

(3) 过两点 $(2,0)$，$(0,-3)$；

(4) 过原点，平分Ⅰ、Ⅲ象限角；

(5) 过点(3,1)和(7,1);

(6) x 轴上的截距为-5,倾斜角为$\frac{5\pi}{6}$.

解 (1) 直线的斜率为 $k=\mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{4}=-1$,由点斜式方程得直线方程为

$$y-(-3)=-1(x-9)$$

即 $$x+y-6=0$$

(2) 直线的斜率 $k=\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,由截斜式得直线方程为

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+(-2)$$

即 $$\sqrt{3}x-3y-6=0$$

(3) 由已知,直线在 x 轴和 y 轴的截距分别为 $a=2,b=-3$,由截距式得直线的方程为

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1,\text{即 } 3x-2y-6=0$$

(4) 平分Ⅰ、Ⅲ象限角的直线斜率为 $k=\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}=1$,由点斜式得直线方程为

$$y-0=1\times(x-0)$$

即 $$x-y=0$$

(5) 由于直线上两点(3,1)和(7,1)的纵坐标均为1,故直线的方程为 $y=1$,即 $y-1=0$.

(6) 由于直线在x轴上的截距为-5,所以它过点$(-5,0)$,斜率为 $k=\mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,由点斜式得直线方程是

$$y-0=-\frac{\sqrt{3}}{3}[x-(-5)]$$

即 $\sqrt{3}x+3y+5\sqrt{3}=0$

小结 根据已知条件求直线方程，一般做法是：

1° 判断直线是否平行于坐标轴，平行时，写出特殊形式的方程，如(5).

2° 创造条件使其满足直线方程的某种形式，写出这种形式的直线方程.

3° 化为一般式 $Ax+By+C=0$ 的方程.

评注 直线在坐标轴上的截距 a、b 可正可负，在代入方程时应特别注意，这里截距的概念同距离的概念不同.

例 2 已知 $P_1(3,5)$、$P_2(x_2,7)$、$P_3(-1,y_3)$是斜率 $k=2$ 的直线 l 上的三个点，求 x_2、y_3.

解 过点 $P_1(3,5)$且斜率为 $k=2$ 的直线方程为

$y-5=2(x-3)$，即 $y=2x-1$

由于 $P_2(x_2,7)$、$P_3(-1,y_3)$在直线上，所以它们的坐标适合方程，因此有

$$7=2x_2-1, y_3=2\times(-1)-1$$

解得 $x_2=4$，$y_3=-3$.

例 3 已知 $A(-1,1)$、$B(-1,3)$、$C(2,3)$、$D(2,-1)$是坐标平面上的四点，求四边形 $ABCD$ 的面积 S，并判断其类型.

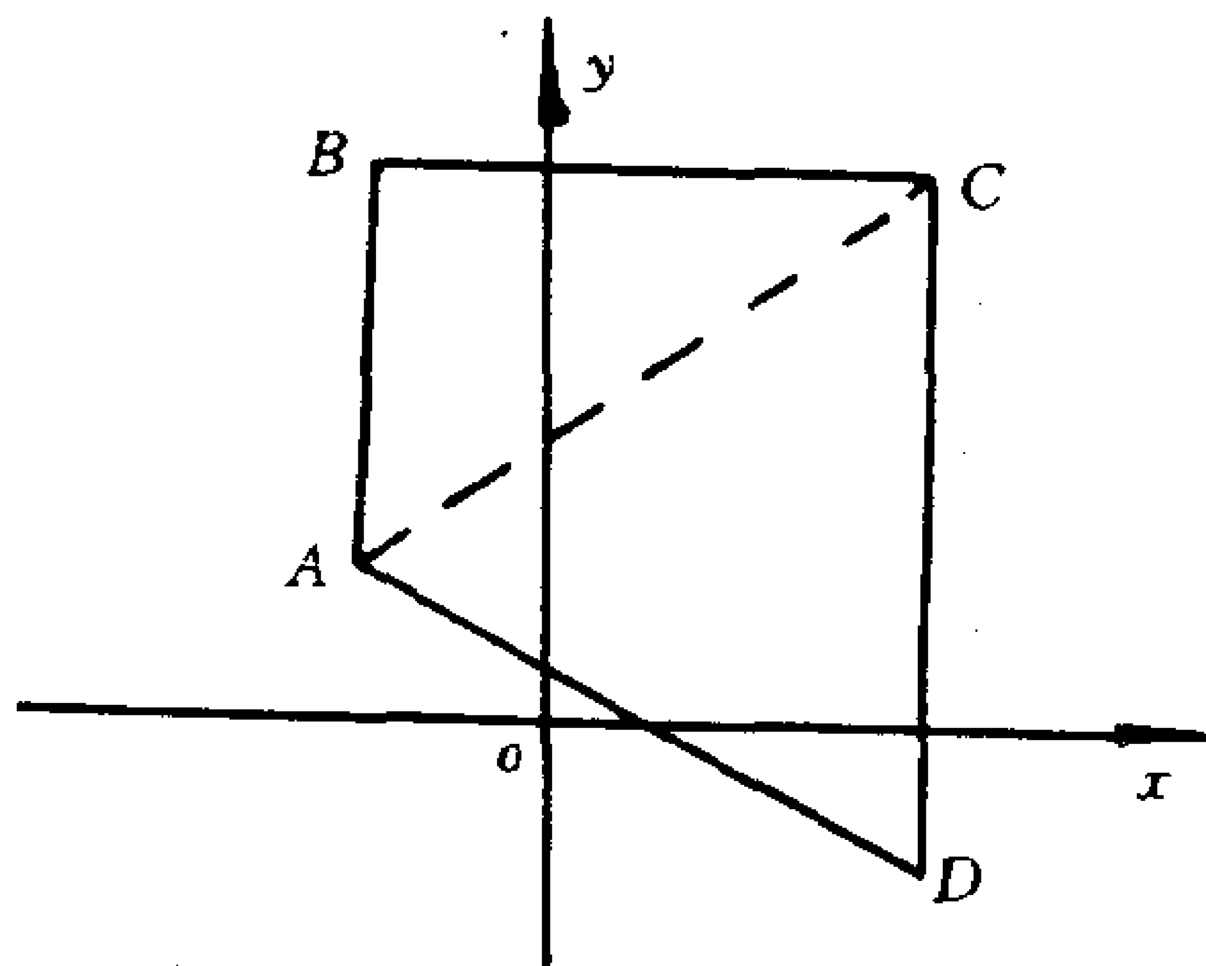


图 1 3

解 如图 1—3 所示，四边形的面积为

$S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\times 6+\frac{1}{2}\times 12=9$$

由于$A(-1,1)$，$B(-1,3)$可知直线AB的方程为$x=-1$，由于$D(2,-1)$，$C(2,3)$，可知直线CD的方程$x=2$，由于$B(-1,3)$，$C(2,3)$，可知直线BC的方程$y=3$，又$k_{AD}=\frac{1-(-1)}{-1-2}$，于是可得$AB\parallel CD$，$BC\perp CD$，$AD$不平行于$BC$，所以四边形$ABCD$是直角梯形.

小结 若已知多边形顶点的坐标，可将其划分成几个三角形，将多边形的面积计算转化为几个三角形的面积和，若不用绝对值，每个三角形顶点的顺序应成反时针方向.

评注 本例极易算得$|AB|=2$，$|BC|=3$，$|CD|=4$，若先判断$ABCD$为梯形，用梯形面积公式计算$ABCD$的面积要简捷得多.

例4 问直线$Ax+By+C=0$在下列条件下通过哪几个象限：

(1)$AB<0$，$BC<0$；

(2)$A=0$，$BC<0$；

(3)$C=0$，$AB>0$.

解 直线$Ax+By+C=0$可化为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}\qquad(1)$$

(1)$\because AB<0$，$\therefore -\frac{A}{B}>0$，即直线斜率$k>0$，又$\because BC<0$，$\therefore -\frac{C}{B}>0$，即直线的截距$b>0$，因而直线过Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ象限.

(2) ∵ $A=0$，∴ $-\frac{A}{B}=0$，又 $BC<0$，∴ $-\frac{C}{B}>0$，方程(1)变为 $y=-\frac{C}{B}>0$，因此直线过Ⅰ、Ⅱ象限.

(3) ∵ $C=0$，∴直线过原点，又 $AB>0$，∴ $-\frac{A}{B}<0$，即象限的斜率 $k<0$，因而，直线过Ⅱ、Ⅳ象限.

评注 一般讲，对直线 l，若

1° $k>0$ 时，① $b>0$ 时，它过Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ象限；② $b<0$ 时，它过Ⅰ、Ⅲ、Ⅳ象限；③ $b=0$ 时，它过Ⅰ、Ⅲ象限.

2° $k<0$ 时，① $b>0$ 时，它过Ⅰ、Ⅱ、Ⅳ象限；② $b<0$ 时，它过Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ象限；③ $b=0$ 时，它过Ⅱ、Ⅳ象限.

3° $k=0$ 时，① $b>0$ 时，它过Ⅰ、Ⅱ象限；② $b<0$ 时，它过Ⅲ、Ⅳ象限；③ $b=0$ 时，为 x 轴.

4° k 不存在时，① $a>0$（a 为直线在 x 轴上的距离）时，它过Ⅰ、Ⅳ象限；② $a<0$ 时，它过Ⅱ、Ⅲ象限；③ $a=0$ 时，为 y 轴.

习 题 1.2

1. 四边形 $ABCD$ 的四个顶点是 $A(2,3)$、$B(1,-1)$、$C(-1,2)$、$D(-2,2)$，求它四边所在直线的倾斜角和斜率.

2. 根据下列条件写出直线方程：

(1)斜率是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，经过点 $A(8,-2)$；

(2)过点 $B(-2,b)$，且与 x 轴垂直；

(3)斜率为 -4，在 y 轴上的截距为 7；

(4)经过两点 $A(-1,8)$，$B(4,-2)$；

(5)在 y 轴截距是 2，且与 x 轴平行；

(6)在 x 轴、y 轴上的截距分别是 4 与 -3.

3. 一条直线经过点 $A(2,-3)$，它的倾斜角等于直线 $y=\frac{1}{\sqrt{5}}x$ 的

倾斜角的2倍，求这条直线的方程.

4. 一条直线和 y 轴相交于点 $P(0,2)$，它的倾斜角的正弦是 $\frac{4}{5}$，求这条直线的方程，这样的直线有几条？

5. 已知△ABC 的顶点是 $A(0,5)$、$B(1,-2)$、$C(-6,4)$，求 BC 边上的中线所在直线的方程.

6. 设 A、B 两点的坐标分别是 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，直线 AB 的倾斜角是 α，求证

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,|\cos\alpha|$$

7. 求过点 $P(2,3)$ 且在两轴上的截距相等的直线方程.

8. 直线方程 $Ax+By+C=0$ 的系数 A、B、C 满足什么条件时，这直线

(1)与两坐标轴都相交；

(2)只与 x 轴相交；

(3)只与 y 轴相交；

(4)是 x 轴；

(5)是 y 轴.

9. 油桶储油 20m^3，从一管道等速流出，在50min内流完，用截距式写出油桶剩余的油量 $Q(m^3)$ 和流出时间 $t(\text{min})$ 间的方程，并画出图象(注意 $(0\leqslant t\leqslant 50)$).

§1.3 直线的法式方程

一、基本内容

1. 直线的法线和法线的幅角

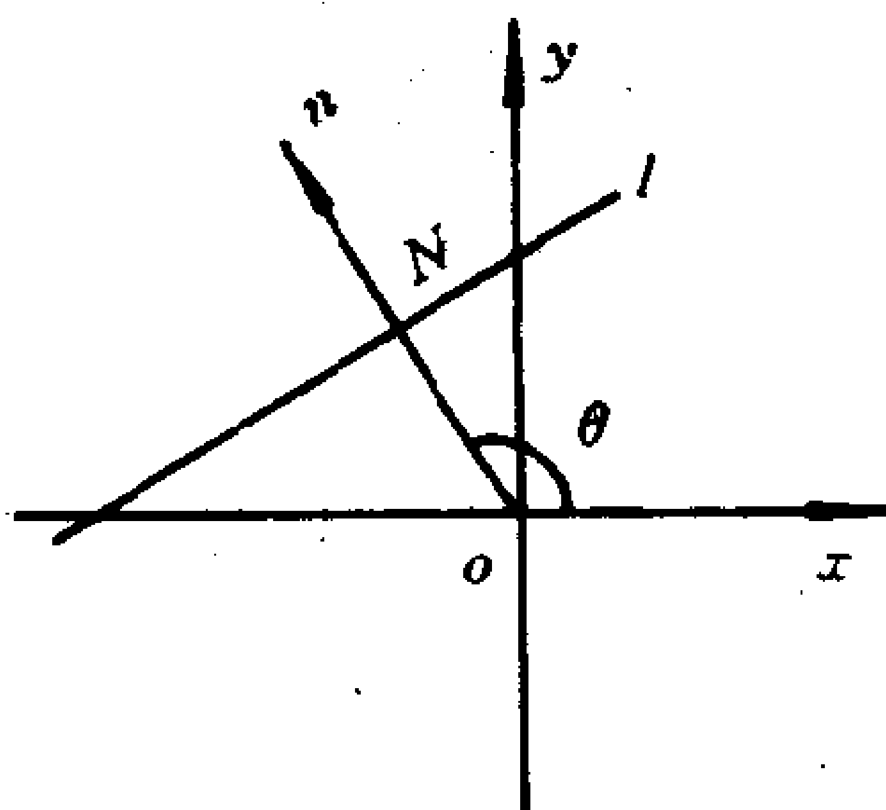


图 1-4

(1)当直线 l 不过原点，从原点 o 引射线 n 垂直于直线 l，交 l 于 N，射线 n 称为直线 l 的法线，x 轴正方向与射线 n 的夹角用 θ 表示，称为法线的幅角，原点 o 到直线的距离 $|oN|$ 用 p 表示，有 $0\leqslant$

$\theta<2\pi, p>0$(图 1—4).

(2)直线 l 过原点 o 时,法线幅角 θ 取值范围是 $0\leqslant\theta<\pi$, $p=0$(图 1—5),特别地,直线为 y 轴,$\theta=0$,$p=0$;直线为 x 轴,$\theta=\frac{\pi}{2}$,$p=0$.

有了以上规定,平面内任一条直线都可以决定两个数 p 和 θ,反之,每一组 p 和 θ 的值,都能确定和建立直线方程.

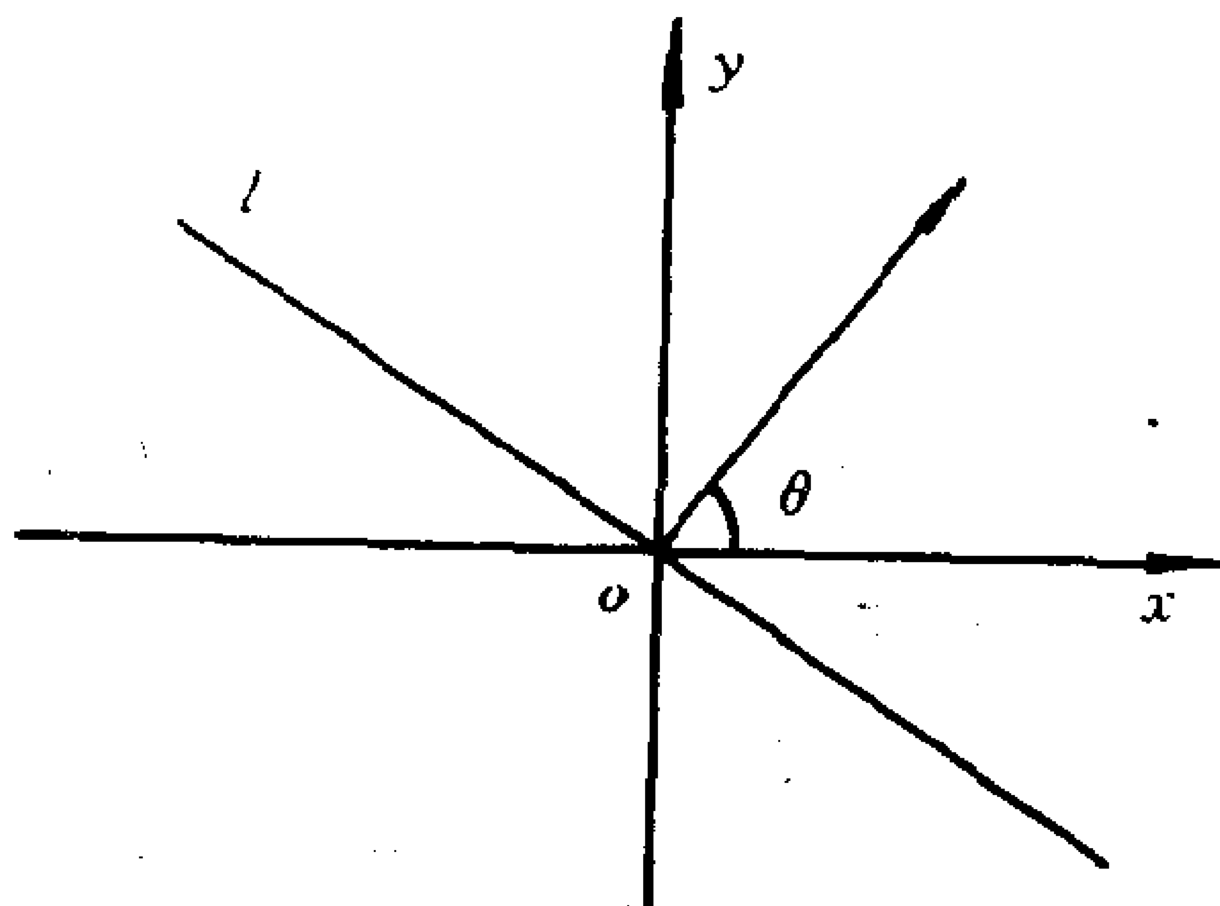


图 1—5

2. 法线式

已知直线 l 的法线的幅角 θ,原点到直线 l 的距离 p,直线 l 的方程是

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0 \qquad (1.3\text{—}1)$$

方程(1.3—1)称为直线方程的法线式.

方程(1.3—1)有下面两个特点:

(1)x 和 y 的系数分别是 $\cos\theta$、$\sin\theta$,其平方和等于 1;

(2)常数项 $-p$ 是负数或者是零,当常数项是零,即 $-p=0$,$p=0$ 时,表示直线过原点,因为,这时 $0\leqslant\theta<\pi$,所以 y 的系数是正的或零,如果 y 的系数也为零,那么因为 $\theta=0$,从(1.3—1)可知,x 的系数 $\cos\theta=1$.

3. 化直线的一般式方程为法线式方程

设直线 l 的一般式方程为

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

方程(1)乘以一个不为零的常数 λ,得

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0 \qquad (2)$$

要使方程(2)为法线式方程，由法线式方程的特征，必有 $(\lambda A)^2+(\lambda B)^2=1$ 与 $\lambda C\leqslant 0$，且 $C=0$ 时，$\lambda B\geqslant 0$，若还有 $B=0$，$\lambda A=1$.

$$\therefore \quad \lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

(1)当 $C>0$，$\lambda<0$；

(2)当 $C<0$，$\lambda>0$；

(3)当 $C=0$，$B>0$，$\lambda>0$；$B<0$，$\lambda<0$；$B=0$，$\lambda=\frac{1}{A}$.

λ 叫做法式化因子.

4. 点与直线的位置关系

(1)点与直线的离差

已知直线 l 的法式方程 $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ 和点 $P(x_0, y_0)$，则称数 $\delta=x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-p$ 为点 p 与直线 l 的离差.

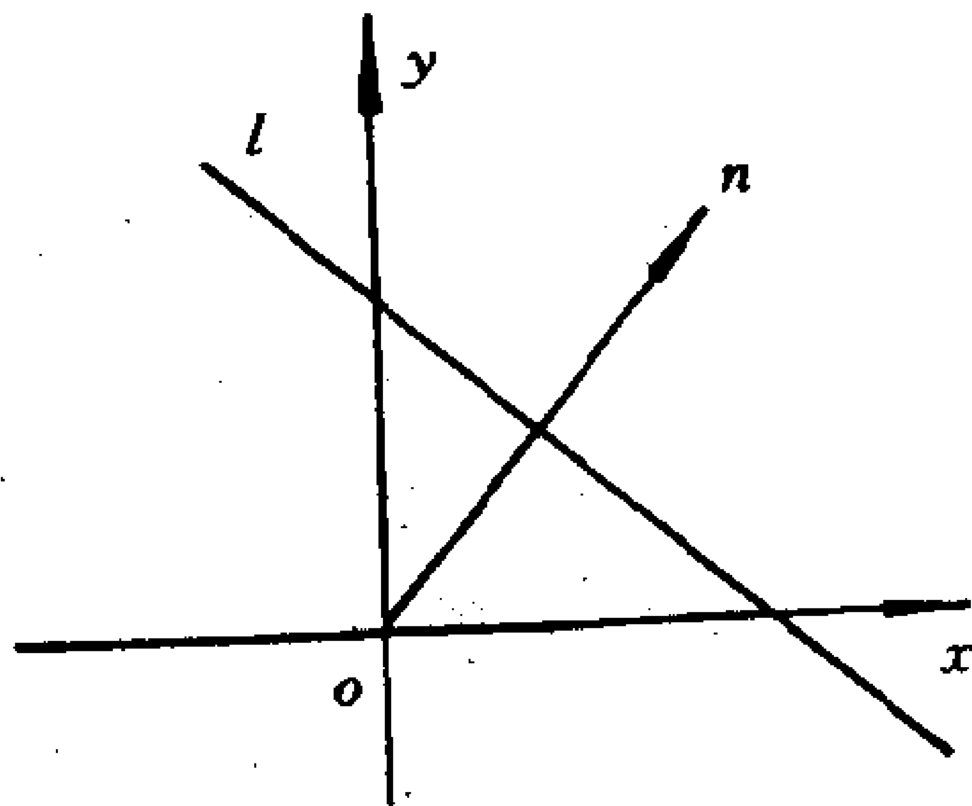


图 1—6

由图 1—6 可以看出，直线 l 将平面划分为三部分，直线上、直线法线方向指向的一侧和直线法线方向指向相反的一侧，不难证明，位于这三部分的点，对于直线 l 的离差分别为 $\delta=0$，$\delta>0$ 和 $\delta<0$，对于不过原点的直线 l，又可表述为：若 P 在直线 l 上，离差 $\delta=0$；若 P 点与坐标原点在直线 l 的异侧，离差 $\delta>0$；若 P 点与坐标原点在直线 l 的同侧，离差 $\delta<0$.

(2)点到直线的距离

已知点 P 到直线 l 的离差是 δ，则点 P 到直线 l 的离距 $d=|\delta|$.

通常情况下有下面两个定理：

(i)已知直线 l 的法线式方程 $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$，点 $P(x_0,y_0)$，则点 P 到直线 l 的距离

$$d=|x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-p|$$

(ii)已知直线 l 的一般方程 $Ax+By+C=0$ 和点 $P(x_0,y_0)$，则 P 点到直线 l 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

二、常用方法及应用举例

例 1 已知直线的斜率 $k=-\sqrt{3}$，原点到直线的距离为 4，求直线的方程.

解 ∵直线的斜率 $k=-\sqrt{3}$，∴倾斜角 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$，所以直线的法线幅角 $\theta_1=\frac{\pi}{6}$ 或 $\theta_2=\frac{7\pi}{6}$，$p=4$，故直线的法式方程是

$$x\cos\frac{\pi}{6}+y\sin\frac{\pi}{6}-4=0$$

或
$$x\cos\frac{7\pi}{6}+y\sin\frac{7\pi}{6}-4=0$$

即 $\sqrt{3}x+y-8=0$ 或 $\sqrt{3}x+y+8=0$

例 2 化下列直线方程为法线式方程

(1) $12x+5y-26=0$； (2) $3x-4y+7=0$；

(3) $4x-3y=0$； (4) $8x=0$.

解 (1) $A=12,B=5,C=-26<0$

$$\therefore\lambda=\frac{1}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{1}{13}$$

∴原方程化为法线式方程为

$$-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-2=0$$

(2)$A=3,B=-4,C=7>0$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = -\frac{1}{5}$$

∴原方程化为法线方程为

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{7}{5} = 0$$

(3) $A=4, B=-3<0, C=0$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{-\sqrt{4^2+(-3)^2}} = -\frac{1}{5}$$

∴原方程化为法线式方程为

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = 0$$

(4) $A=8, B=C=0$ ∴ $\lambda=\frac{1}{8}$，原方程化为法线式方程是

$$x = 0$$

评注 化直线的一般式方程为法线式方程，关键是计算法式化因子 λ，其中重点是确定法式化因子 λ 的符号.

例 3 已知△ABC 三边 AB、AC 和 BC 所在直线的方程分别是 $x+y=1$，$x-y=1$，$2x-y=5$，求三角形的面积.

解 由方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ 得 $A(1,0)$

由方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=5 \end{cases}$ 得 $B(2,-1)$

由方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=5 \end{cases}$ 得 $C(4,3)$

A 到 BC 的距离（即△ABC 的 BC 边上的高）为

$$d = \frac{|2\times 1 - 0 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$|BC| = \sqrt{(2-4)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

$\therefore \quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\frac{3}{\sqrt{5}}=3$

评注 要求两直线的交点坐标，只要将其方程联立，解二元一次方程组即可.

用点到直线的距离公式求△ABC 的高，是一种有效方法.

例 4 设动点 $P(x,y)$到直线 $3x+4y-1=0$ 和 $12x-5y-7=0$ 距离相等，求动点 $P(x,y)$的轨迹.

解 由题设 $P(x,y)$到直线 $3x+4y-1=0$ 的距离为

$$d_1=\frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|3x+4y-1|}{5}$$

$P(x,y)$到直线 $12x-5y-7=0$ 的距离为

$$d_2=\frac{|12x-5y-7|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{|12x-5y-7|}{12}$$

$\because \quad d_1=d_2$

$\therefore \quad \frac{|3x+4y-1|}{5}=\frac{|12x-5y-7|}{13}$

$\therefore \quad \frac{3x+4y-1}{5}=\pm\frac{12x-5y-7}{13}$

$\therefore$ $P(x,y)$的轨迹方程为

$$21x-22y-22=0 \text{ 或 } 33x+9y-16=0$$

评注 $P(x,y)$的轨迹是两条互相垂直的直线，此二直线为已知二直线的交角的两条角平分线.

例 5 在直线 $x-y+1=0$ 上求一点 P，使它到两直线 $2x+y-1=0$ 与 $3x-y+2=0$ 的距离的平方和最小.

解 设所求直线 $x-y+1=0$ 上的一点为 $P_1(x_1,y_1)$，它到二直线 $2x+y-1=0$ 与 $3x-y+2=0$ 的距离分别是

$$d_1=\frac{|2x_1+y_1-1|}{\sqrt{2^2+1}} \text{ 与 } d_2=\frac{|3x_1-y_1+2|}{\sqrt{3^2+1}}$$

$\because x_1-y_1+1=0$

$\therefore d_1=\dfrac{|3x_1|}{\sqrt{5}}, d_2=\dfrac{|2x_1+1|}{\sqrt{10}}$

令 $\quad t=d_1^2+d_2^2$

有 $\quad t=\dfrac{(3x_1)^2}{5}+\dfrac{(2x_1+1)^2}{10}$

即 $\quad t=\dfrac{1}{10}(22x_1^2+4x_1+1)^2$

$\therefore \quad t=\dfrac{22}{10}(x_1+\dfrac{1}{11})^2+\dfrac{99}{1210}$

要使 t 为最小，只须 $x_1=-\dfrac{1}{11}$，即可，但

$$x_1-y_1+1=0, \text{即 } y_1=x_1+1=\frac{10}{11}$$

因此，所求的点 $P(-\dfrac{1}{11},\dfrac{10}{11})$ 是使它到二直线距离平方和最小，且 $t_{最小}=\dfrac{99}{1210}=\dfrac{9}{110}$

例6 已知等腰 $\triangle oAB$ 的顶角为 2θ，底边上的高为 h，在 $\triangle oAB$ 内有一动点 P，P 到三边 oA、oB、AB 的距离分别是 $|PD|$、$|PF|$、$|PE|$，并且满足关系 $|PD|\cdot|PF|=|PE|^2$，求 P 点的轨迹.

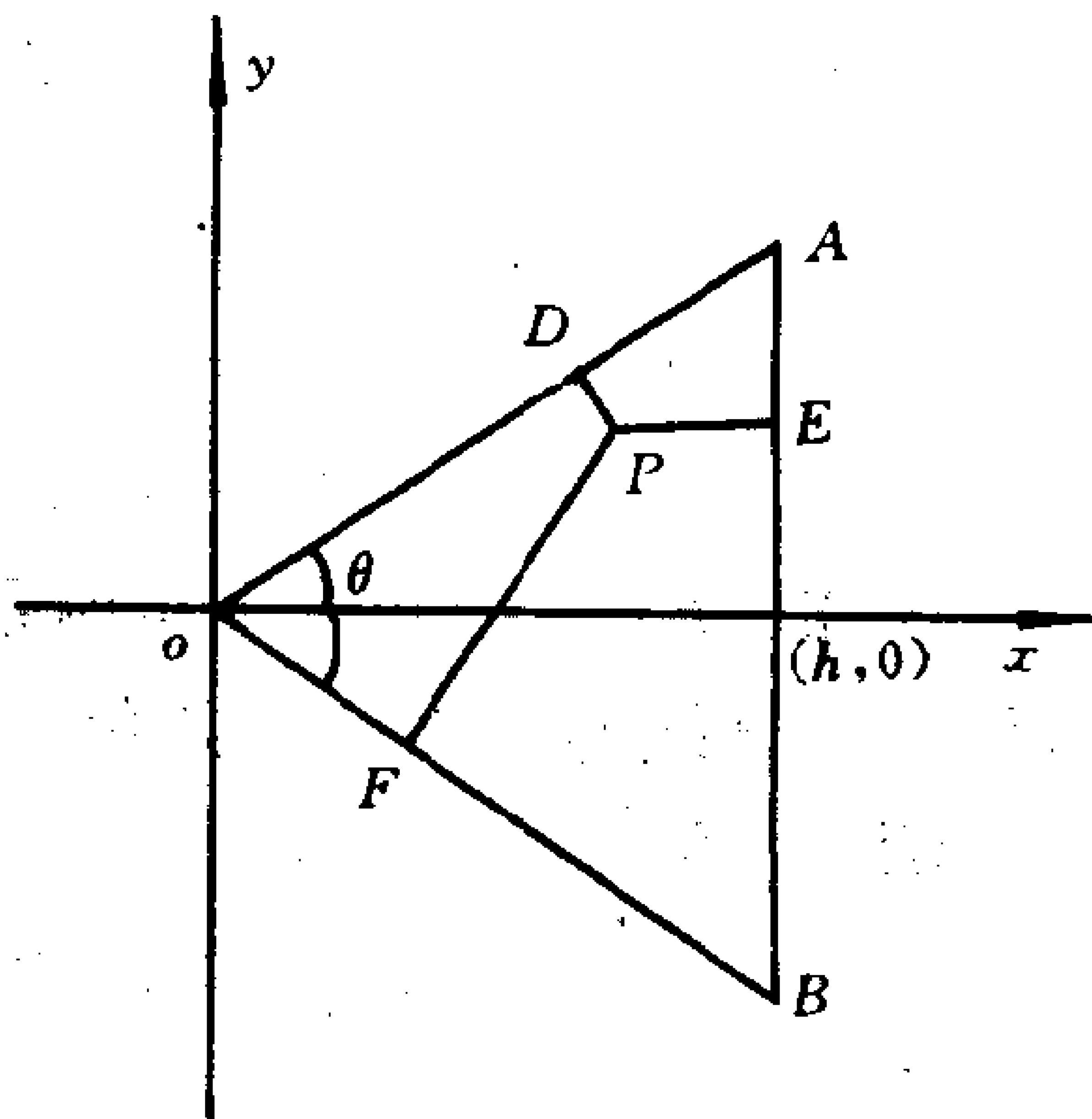


图 1—7

解 如图 1—7 建立坐标系，即以 $\triangle oAB$ 的顶点 o 为坐标原点，底边 AB 上的高为 x 轴.

设动点 P 的坐标为 (x,y)，显然 $0<x<h$.

直线 oA 的方程为 $y=x\mathrm{tg}\theta$;

直线 oB 的方程为 $y=-x\mathrm{tg}\theta$;

直线 AB 的方程为 $x-h=0$.

上述直线方程的法线式分别为

oA： $-x\sin\theta+y\cos\theta$;

oB： $x\sin\theta+y\cos\theta$;

AB： $x-h=0$.

由点到直线距离公式，可得

$$|PD| = |x\sin\theta - y\cos\theta|;$$
$$|PF| = |x\sin\theta + y\cos\theta|;$$
$$|PE| = |x - h| = h - x.$$

因为 P 在 $\triangle oAB$ 的内部，所以 $x\mathrm{tg}\theta>\pm y$. 可得 $x\sin\theta\pm y\cos\theta>0$.

由条件 $|PD|^2=x\sin\theta-y\cos\theta$，$|PF|^2=x\sin\theta+y\cos\theta$，$|PD|\cdot|PF|=|PE|^2$，得

$x^2\sin^2\theta-y^2\cos^2\theta=(h-x)^2$

即 $x^2\cos^2\theta-2hx+y^2\cos^2\theta+h^2=0$

两边同时除以 $\cos^2\theta$，得

$x^2-2hx\sec^2\theta+y^2+h^2\sec^2\theta=0$

即 $(x-h\sec^2\theta)^2+y^2=(h+\mathrm{tg}\theta\sec\theta)^2 \quad (0<x<h)$

因此，所求的轨迹为以 $(h\sec^2\theta,0)$ 为圆心，$h\mathrm{tg}\theta\sec\theta$ 为半径的圆在 $\triangle ABC$ 内的一段弧.

评注 这里推导的过程是可逆的，因此，若动点 P 不受限制在 $\triangle oAB$ 内，其轨迹为整个圆，而且此圆定过 A、B 两点，但本例的动点在 $\triangle oAB$ 内，所以，动点 P 的轨迹只能是以 A、B 为端点在 $\triangle oAB$ 内的圆弧 AB（不含 A、B 两点）.

习 题 1.3

1. 求点 $A(-2,3)$ 到直线 $3x+4y+3=0$ 的距离.

2. 求点 $P(3,1)$ 到直线 $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ 的距离.

3. 已知点 $(m,3)$ 到直线 $l:3x-5y+1=0$ 的距离为 2，求 m.

4. 求到动点 $A(3,2)$ 的距离的平方与到直线 $3x-2y+1=0$ 的距离之和为 5 的点的轨迹.

§1.4 直线与直线的位置关系

一、基本内容

1. 二直线的夹角

二直线相交所成的二对对顶角中不大于 $\pi/2$ 的角叫做二直线的夹角，二平行直线的夹角为 0.

二直线 l_1、l_2 的夹角为 θ，斜率分别为 k_1、k_2，则有

$$\mathrm{tg}\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right| \tag{1.4—1}$$

2. 二直线平行

二直线 l_1、l_2 的斜率分别为 k_1、k_2，由式(1.4—1)可得 $l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$，这里把重合视为平行的特殊情况. 若二直线 l_1，l_2 的一般式方程分别为

$A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$，则有

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}\Leftrightarrow l_1 /\!/ l_2$$

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\Leftrightarrow l_1、l_2\text{ 重合}$$

3. 二直线的垂直

由式(1.4—1)，$1+k_1k_2=0$ 即 $k_1k_2=-1$ 时，二直线 l_1，l_2

夹角 θ 的正切 $\mathrm{tg}\theta$ 不存在，于是 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $l_1\perp l_2$，因此，有下面的命题成立，即：

二直线 l_1、l_2 的斜率分别为 k_1、k_2，则

$$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$$

若二直线 l_1、l_2 的一般式方程分别为：$A_1x+B_2y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$，则有

$$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{B_1}=-\frac{B_2}{A_2} \text{或} A_1A_2+B_1B_2=0$$

二、常用方法及应用举例

例 1　已知 l_1：$2x-4y+7=0$ 和 l_2：$x-2y+5=0$，求证 $l_1 /\!/ l_2$.

证明　由已知可得：l_1 的斜率 $k_1=\frac{1}{2}$，截距 $b_1=\frac{7}{4}$，l_2 的斜率 $k_2=\frac{1}{2}$，截距 $b_2=\frac{5}{2}$.

$$\because k_1=k_2=\frac{1}{2}, b_1=\frac{7}{4}\neq\frac{5}{2}=b_2$$

$$\therefore l_1 /\!/ l_2$$

评注　本例可直接由二直线的一般式方程的系数关系判定，因为 $\frac{2}{1}=\frac{-4}{-2}\neq\frac{7}{5}$，所以，$l_1 /\!/ l_2$.

例 2　已知直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$ 和直线 l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$（$B_1B_2\neq0$，$A_1A_2+B_1B_2\neq0$），l_1 与 l_2 的夹角为 θ，求证

$$\mathrm{tg}\theta=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right| \quad (1.4-2)$$

证明　由已知可得：直线 l_1 的斜率为 $k_1=-\frac{A_1}{B_1}$，直线 l_2 的斜率 $k_2=-\frac{A_2}{B_2}$，所以

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{-\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_2}}{1+\frac{A_1}{B_1}\times\frac{A_2}{B_2}}\right|=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{B_1B_2+A_1A_2}\right|.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\theta=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|$$

评注 式(1.4—2)可作为公式运用,并且可由此式出发讨论二直线平行、垂直条件.

例3 已知$\triangle ABC$的三边AB、AC、BC所在直线的方程分别为:$x+2y-1=0$、$2x-4y+7=0$、$2x+y-5=0$,试判定$\triangle ABC$的形状,并求其两锐角的正余弦.

分析 给了三角形三边所在直线的方程,要判断其形状,就要从内角考虑分类,首先从特殊类型考虑,看其是否是直角三角形,观察AC、BC的方程,$2x-4y+7=0$,$2x+y-5=0$,易得$AC\perp BC$即$\angle C=\frac{\pi}{2}$,故$\triangle ABC$为直角三角形.

解 在直线AC和BC的方程$2x-4y+7=0$、$2x+y-5=0$中,由于$2\times2+(-4)\times1=0$,$\therefore AC\perp BC$,也即$\triangle ABC$中,$\angle C=\frac{\pi}{2}$,又三直线$x+2y-1=0$、$2x-4y+7=0$、$2x+y-5=0$既不两两平行,又不共点,故$\triangle ABC$为直角三角形,由直线AB、AC的方程$x+2y-1=0$,$2x-4y+7=0$,可得

$$\operatorname{tg}A=\frac{1\times(-4)-2\times2}{1\times2+2\times(-4)}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\qquad \sin A=\frac{4}{5},\cos A=\frac{3}{5}$$

$$\text{又}\qquad \angle A+\angle B=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\qquad \sin B=\frac{3}{5},\cos B=\frac{4}{5}$$

小结 根据三角形三边所在的直线方程

$l_i: A_i x + B_i y + C_i = 0 \quad i=1,2,3.$

判断三角形的形状，可以按如下步骤进行：

(1) 说明 l_1、l_2、l_3 相交成三角形，即要说明 l_1、l_2、l_3 既不两两平行，又不共点，不平行可由平行条件判断，不共点可用行列式 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$ 是否为零来判断，为零则共点；不为零则不共点.

(2) 判断 l_1、l_2、l_3 有无相互垂直关系，若有则三角形为直角三角形，反之则三角形不是直角三角形.

(3) 计算 l_1、l_2、l_3 两两夹角的正切值 $\operatorname{tg}\alpha_1$、$\operatorname{tg}\alpha_2$、$\operatorname{tg}\alpha_3$.

若 $\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\alpha_3 \ \sqrt{3}$ 则三角形为正三角形；若 $\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_3=\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3$. 则三角形为锐角三角形，特别 $\operatorname{tg}\alpha_1$、$\operatorname{tg}\alpha_2$、$\operatorname{tg}\alpha_3$ 又有两个相等，三角形为等腰锐角三角形；若 $\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_3\neq\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3$，则三角形为钝角三角形，特别又有 $\operatorname{tg}\alpha_1$、$\operatorname{tg}\alpha_2$、$\operatorname{tg}\alpha_3$ 两个相等，三角形为等腰钝角三角形.

例 4 求过点 $A(2,1)$ 且与直线 $l_0: 2x+y-10=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线 l 的方程.

解 设 l 的斜率为 k，由已知 l_0 的斜率 $k_0=-2$，根据 l、l_0 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$

故 $\left|\frac{k+2}{1-2k}\right|=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$

$\therefore \frac{k+2}{1-2k}=\pm 1$

解之，得 $k=3$ 或 $k=-\frac{1}{3}$

由点斜式方程得 l 的方程为

$y-1=3(x-2)$ 或 $y-1=-\frac{1}{3}(x-2)$

即 $3x-y-5=0$ 或 $x+3y-5=0$.

例 5 已知直线 $l: x-y+1=0$，求点 $A(2,4)$ 关于直线 l 的对称点 A'.

解法一 设 A' 的坐标为 (x',y')，因为 l 为 AA' 的垂直平分线，故有 AA' 的中点 $(\frac{x'+2}{2},\frac{y'+4}{2})$ 在 l 上，而它的斜率 $k=\frac{y'-A}{x'-2}$ 与 l 的斜率 $k=1$ 为负倒数，于是可得方程组.

$$\begin{cases}\frac{x'+2}{2}-\frac{y'+4}{2}=0\\ \frac{y'-4}{x'-2}=-1\end{cases}$$ 解之，得 $x'=3, y'=3$

所以，要求的对称点是 $A'(3,3)$.

解法二 设 A' 的坐标为 (x',y')，由题设 AA' 等于 A 到直线 l 距离的二倍，且 A、A' 对直线 l 的离差符号相反，于是可得方程组

$$\begin{cases}\sqrt{(x'-2)^2+(y'-4)^2}=2\left|\frac{2-4+1}{\sqrt{2}}\right|\\ \frac{x'-y'+1}{-\sqrt{2}}=\frac{2-4+1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

解之，得 $x'=3, y'=3$

∴要求的对称点是 $A'(3,3)$.

解法三 过 $A(2,4)$ 而垂直于直线 $l: x-y+1=0$ 的直线方程是 $x+y-6=0$.

解方程组 $\begin{cases}x-y+1=0\\ x+y-6=0\end{cases}$ 得 l 与直线 AA' 的交点 $O(\frac{5}{2},$

$\frac{7}{2}$)，此点为 AA' 的中点. 设 $A(x',y')$，则 $x'=2\times\frac{5}{2}-2=3$，$y'=2\times\frac{7}{2}-4=3$. 所以，要求的对称点是 $A'(3,3)$.

评注　求 A 关于直线 l 的对称点 A' 的方法有多种，但它们都是紧紧抓住一个基本条件，l 是 AA' 的垂直平分线，由此导出不同的等价条件，就使得分析的途径不一，得出不同的解法.

例 6　已知二直线 $l_1: x+my+6=0$ 和 $l_2: (m-2)x+3y+2m=0$. 当 m 为何值时，l_1 与 l_2 (1)平行；(2)重合；(3)垂直；(4)相交但不垂直.

解　(1)要二直线平行，应有

$$\frac{1}{m-2}=\frac{m}{3}\neq\frac{6}{2m}, \text{得 } m=-1$$

即当 $m=-1$ 时，二直线 $l_1 /\!/ l_2$.

(2)要二直线重合，应有

$$\frac{1}{m-2}=\frac{m}{3}=\frac{6}{2}, \text{得 } m=3$$

即当 $m=3$ 时，二直线 l_1、l_2 重合.

(3)要二直线垂直，应有

$$1\times(m-2)+3m=0, \text{得 } m=\frac{1}{2}$$

(4)当 $m\neq-1$，$m\neq\frac{1}{2}$，且 $m\neq3$ 时，二直线 l_1、l_2 相交而不垂直.

习　题　1.4

1. 求二直线 $y=mx+n$ 与 $y=mx+l$ 间的距离.

2. 在直线 $x-y+1=0$ 上求一点 P，使它到二直线 $2x+y-1=0$ 与 $3x-y+2=0$ 的距离平方和为最小.

3. 判断下列每组直线是否平行、垂直、重合、相交而不垂直. 如果相交，求出交点，如果平行，求出平行距离.

(1) $3x+2y-1=0$，$\frac{1}{2}+y+7=0$；

(2) $nx+y=5$，$nx-y-1=0$；

(3) $x-3y-3=0$，$8y=-3x+3$；

(4) $x-3y+1=0$，$8x-24y+2=0$.

4. 求与直线 $l: mx+ny+p=0(m^2+n^2\neq0)$ 平行且与 l 的距离为 d 的直线方程.

5. 已知直线 $l: 3x-2y+1=0$ 与 $mx-ny+1=0$ 平行，而与 $y+mx-n=0$ 垂直，求 m、n.

6. 等腰三角形一腰所在的直线 l_1 方程是 $x+y-l=0$，底边所在直线 l_2 的方程是 $y+6=0$，点 $(0,-1)$ 在另一腰上，求这腰所在直线 l_3 的方程.

§1.5 直线束

一、基本内容

直线一般需要两个独立条件才能确定，但是在实际中有时需要讨论过一个定点，或平行于某条直线，或满足其它条件的所有直线，这样具有一个共同性质的直线全体叫做直线束，它们的方程叫做直线束的方程，直线束方程一般含有一个参数.

1. 中心直线束

平面上通过一个固定点的直线全体，叫做中心直线束，固定点叫做直线束的中心.

已知二直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$，则过此二直线交点的直线束方程是：

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2)=0 \tag{1.5—1}$$

其中，λ_1、λ_2 不同时为零.

2. 平行直线束

平面上有固定方向的直线全体，叫做平行直线束，固定方向叫做直线束的方向.

平面上和直线 $Ax+By+C=0$ 方向相同的平行直线的方程是

$$Ax + By + \lambda = 0 \qquad (1.5\text{—}2)$$

其中 λ 为参数.

还有其它形式的直线束，这里主要讨论这两种形式.

二、常用方法及应用举例

例 1 已知三直线 $l_i: A_ix+B_iy+C_i=0, i=1,2,3$，试证明它们共点的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.5\text{—}3)$$

证明 三直线 $l_i: A_ix+B_iy+C_i=0$ 共点的充分必要条件是存在两个不全为零的数 λ_1、λ_2，使

$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2)=A_3x+B_3y+C_3=0$

即 $A_3=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2, B_3=\lambda_1B_1+\lambda_2B_2, C_3=\lambda_1C_1+\lambda_2C_2$，

从而

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \lambda_1A_1+\lambda_2A_2 & \lambda_1B_1+\lambda_2B_2 & \lambda_1C_1+\lambda_2C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

评注 本例的结论已在 § 1.4 例 3 的小结中应用.

例 2 求经过点 $P(-5,5)$的直线束方程.

解 二直线 $x+5=0$ 和 $y-5=0$ 相交于点 $P(-5,5)$，因此，过点 $P(-5,5)$的直线束方程为

$$\lambda_1(x+5)+\lambda_2(y-5)=0,$$

即 $\lambda_1 x+\lambda_2 y+5+(\lambda_1-\lambda_2)=0$

其中，λ_1、λ_2 为不全为零的参数.

评注 一般讲过点$P(a,b)$的直线束方程为$\lambda_1 x+\lambda_2 y-(a\lambda_1+b\lambda_2)=0$，$\lambda_1$、$\lambda_2$ 不全为零.

例 3 求斜率为 k 的直线束方程.

解 直线 $y=kx$，即 $y-kx=0$ 是斜率为 k 的直线，因而，斜率为 k 的平行直线束方程为 $y-kx+\lambda=0$，其中 λ 为参数.

评注 从例 2 和例 3 可以看出，求中心直线束或平行直线束方程，可选两条或一条符合条件的特定直线，进而写出直线束的一般方程.

例 4 试证三角形三内角平分线相交于一点.

分析 首先考虑选择适当的坐标系，由角平分线的性质知道，角平分线上的点到角两边距离相等，反之也然，这样就涉及到角平分线上的点到两边的离差的正负号的问题，为了能使离差的符号一致，从而便于解题，这时应把坐标原点取在三角形的内部. 其次，

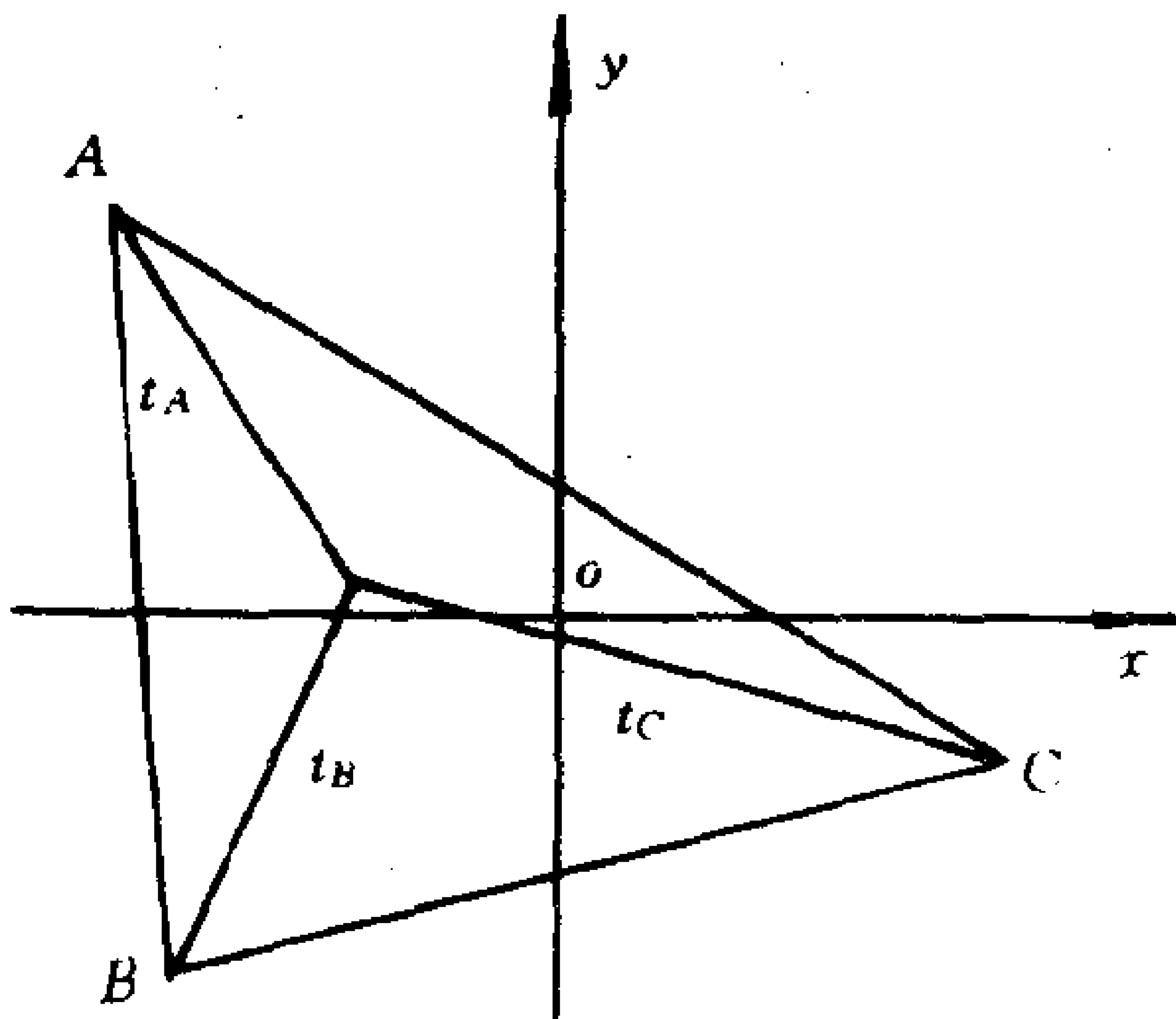


图 1 8

要证明三内角平分线相交于一点，实际上只要证明三内角平分线属于一中心直线束，或利用例 1 的结论，证明式(1.5—3)成立均可.

证明一 取三角形内任一点 o 作坐标原点. 如图 1—8 建立坐标系.

设三角形 ABC 三边的方程为：

$AB: x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0$

$BC: x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0$

$CA: x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3 = 0$

由角平分线上点到两边距离相等，可得其三内角平分线方程分别为：

$t_A: x(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3) + y(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_3) - (p_1 - p_3) = 0$

$t_B: x(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) + y(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) - (p_2 - p_1) = 0$

$t_C: x(\cos\alpha_3 - \cos\alpha_2) + y(\sin\alpha_3 - \sin\alpha_2) - (p_3 - p_2) = 0$

$\because \quad x(\cos\alpha_3 - \cos\alpha_2) + y(\sin\alpha_3 - \sin\alpha_2) - (p_3 - p_2)$

$= -x[(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3)] + y(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_3) - (p_1 - p_3)$

$-x[(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) + y(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) - (p_2 - p_1)$

所以，三内角平分线属于同一中心直线束，也即 t_C 过 t_A、t_B 的交点，故三内角平分线相交于一点.

证明二 同证法一，得

$t_A: x(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3) + y(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_3) - (p_1 - p_3) = 0$

$t_B: x(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) + y(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) - (p_2 - p_1) = 0$

$t_C: x(\cos\alpha_3 - \cos\alpha_2) + y(\sin\alpha_3 - \sin\alpha_2) - (p_3 - p_2) = 0$

因为

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 - \cos\alpha_3 & \sin\alpha_1 - \sin\alpha_3 & -(p_1 - p_3) \\ \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 & \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 & -(p_2 - p_1) \\ \cos\alpha_3 - \cos\alpha_2 & \sin\alpha_3 - \sin\alpha_2 & -(p_3 - p_2) \end{vmatrix} = 0$$

所以，t_A、t_B、t_C 共点，即三内角平分线相交于一点.

例 5 若 $2a-3b=1$，则直线束 $ax+by=5$ 必过一定点.

证明一 令 $a=0$，则 $b=-\frac{1}{3}$；令 $b=0$，则 $a=\frac{1}{2}$.

由
$$\begin{cases}\frac{1}{2}x=5\\ -\frac{1}{3}y=5\end{cases}$$

得 $P(10,-15)$，将 $(10,-15)$ 代入 $ax+by=5$ 的左边得

$$10a-15b=5(2a-3b)=5$$

即直线束 $ax+by=5$ 过定点 $P(10,-15)$.

证明二 设 $2a_1-3b_1=1$，$2a_2-3b_2=1(a_1\neq a_2)$，解方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=5\\ a_2x+b_2y=5\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}2a_1x+2b_1y=10\\ 2a_2x+2b_2y=10\end{cases}$$

则 $\begin{cases}(1+3b_1)x+2b_1y=10\\ (1+3b_2)x+2b_1x+2b_2y=10\end{cases}$ 可解得唯一解 $(10,-15)$，即直线束 $ax+by=5$ 过定点 $(10,-15)$.

即直线束 $ax+by=5$ 过定点 $(10,-15)$.

证明三 将 $2a=1+3b$ 代入 $ax+by=5$ 得

$$(1+3b)x+2by=10,$$
$$(3x+2y)b+(x-10)=0.$$

$$由\begin{cases}3x+2y=0\\ x-10=0\end{cases} \quad 得\begin{cases}x=10\\ y=-15\end{cases}$$

即直线束 $ax+by=5$ 过定点 $(10,-15)$

评注 要证明一直线束过定点，一般可用以下三种方法：

方法一 取两条特殊直线，求出交点（实际上就是定点），再证明该点坐标满足直线束方程.

方法二 取任意两条直线，证明这两条任意直线交于一定点.

方法三 将直线束方程变形为含参数的直线束方程 $(A_1x+B_1y+C_1)+K(A_2x+B_2y+C_2)=0$，再证明方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$$

有唯一解.

当然，还可用观察法，或将直线束方程化为点斜式(点一定而斜率含参数)证之.

例6 求将平行直线束 $y=2x+b$ 夹在二直线 $2x-3y+1=0$ 与 $x+4y-5=0$ 间的线段分成定比 $\lambda=3$ 的点的轨迹方程.

解 由 $\begin{cases}y=2x+b\\2x-3y+1=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{1+3b}{4}\\y=\dfrac{1-b}{2}\end{cases}$

即直线束 $y=2x+b$ 与直线 $2x-3y+1=0$ 相交于动点 $A(\dfrac{1-3b}{4},\dfrac{1-b}{2})$.

由 $\begin{cases}y=2x+b\\x+4y-5=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{5-4b}{9}\\y=\dfrac{10+b}{9}\end{cases}$

即直线束与直线 $x+4y-5=0$ 相交于 $(\dfrac{5-4b}{9},\dfrac{10+b}{9})$.

设该线段 AB 的分点为 $D(x,y)$，且 $\lambda=3$，则

$$x=\frac{\dfrac{1-3b}{4}+3\times\dfrac{10+b}{9}}{1+3}=\frac{23-25b}{48}$$

$$y=\frac{\frac{1-b}{2}+3\times\frac{10+b}{9}}{1+3}=\frac{23-b}{24}$$

消去参数 b，得 $2x-25y+23=0$，这就是分 AB 为 $3:1$ 的点的轨迹方程，图形为直线.

设 BA 的分点为 $E(x,y)$，且 $\lambda=3$，则

$$x=\frac{\frac{5-4b}{9}+3\times\frac{1-3b}{4}}{1-3}=\frac{47-97b}{144}$$

$$y=\frac{\frac{10+b}{9}+3\times\frac{1-b}{2}}{1+3}=\frac{47-25b}{72}$$

消去参数 b，得 $50x-97y+47=0$，这就是分 BA 为 $3:1$ 的点的轨迹方程，图形为直线.

评注 本例是先求轨迹的参数方程，消去参数得普通方程，这是求轨迹方程常用的方法.

习 题 1.5

1. 判断下列每组中的三条直线是否共点：

(1) $2x+y-5=0$，$x-y+2=0$，$x+y-4=0$；

(2) $x+3y-6=0$，$3x+y-2=0$，$x+y-1=0$；

(3) $2x+3y+7=0$，$4x+6y=5$，$y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}$.

2. 通过两直线 $2x-3y+5=0$ 和 $x-4y+5=0$ 的交点引直线，使它与直线 $2x-3=0$ 的夹角为 $45°$ 角.

3. 求垂直于直线 $2x-3y+5=0$ 且通过点 $(3,0)$ 的直线方程.

4. 设直线 $y=mx+3$ 过直线 $2x-y+1=0$ 和直线 $y=x+5$ 的交点，求 m.

5. 求证不论 k 为何值，直线 $(2k-1)x-(k+3)y-(k-11)=0$ 恒通过一个定点，并求出这一定点的坐标.

第 2 章　参数方程

参数方程，是解析几何中内容非常丰富、应用非常广泛、方法最富有变化的部分. 关于适当选择、引进参数以及利用参数方程解题的数学方法，不仅在解决实际问题时常常用到，而且为微积分、微分几何、力学、物理学，特别是为研究曲线性质和解决一些比较复杂的解析几何问题提供了一个有利的工具. 虽然在中学数学课程的内容中就有"参数方程"，但由于教学时间等的限制，这部分内容只作了一个很简单的介绍，本章将对此作进一步的补充、提高和深化.

本章首先介绍有关参数方程的基本知识，再围绕着"由曲线求方程"讨论如何建立动点轨迹的参数方程，并得出直线与二次曲线的参数方程，进而系统地讨论参数方程的应用，最后围绕着"由方程求曲线"，在阐述了"怎样讨论参数方程"这一问题之后，给出了描绘参数方程图形的一般方法，重点是参数方程的概念与参数法思想和各种技巧.

§2.1　曲线的参数方程

一、基本概念

以下主要介绍参数、含有参数的方程，曲线的参数方程等概念.

1. 参数

考察下面实例：

例 1　一水池有一进水管，a 小时可以把空池注满（$a>$

0)；池底有一出水管，3 小时可以把满池的水放完. 如果同时打开进水管和出水管，那么多少小时可以把空池注满.

解 设 x 小时可把空池注满，那么这时进水管注入的水量是全池的 $\frac{x}{a}$，出水管放出的水量是全池的 $\frac{x}{3}$，故得 $\frac{x}{a}-\frac{x}{3}=1$ 即 $(\frac{1}{a}-\frac{1}{3})x=1$

(1) 当 $a=3$ 时，方程无解，从而本题无解. 即说明进出水管流量相等，这时进出抵消，永远不能把空池注满.

(2) 当 $a\neq 3$ 时，方程有唯一解：$x=\frac{3a}{3-a}$ 此时，(Ⅰ)如果 $a<3$，则 $x>0$，解答符合题意；(Ⅱ)如果 $a>3$，则 $x<0$，解答不合题意，本题无解，即入不敷出，永远不能把空池注满.

评注 在本例中主要变数是未知时间 x，但问题中有一个不定的变数 a，而问题的解答与 a 密切相关. 像这种不是主要变数且可以变化的数，就是参数.

例 2 求证：圆的内接矩形中，正方形的面积最大.

解 设矩形的长为 a，宽为 b，圆的半径为 R，则矩形面积为 $S=ab$. 如图 2—1，引进一个辅助变数 α，则有

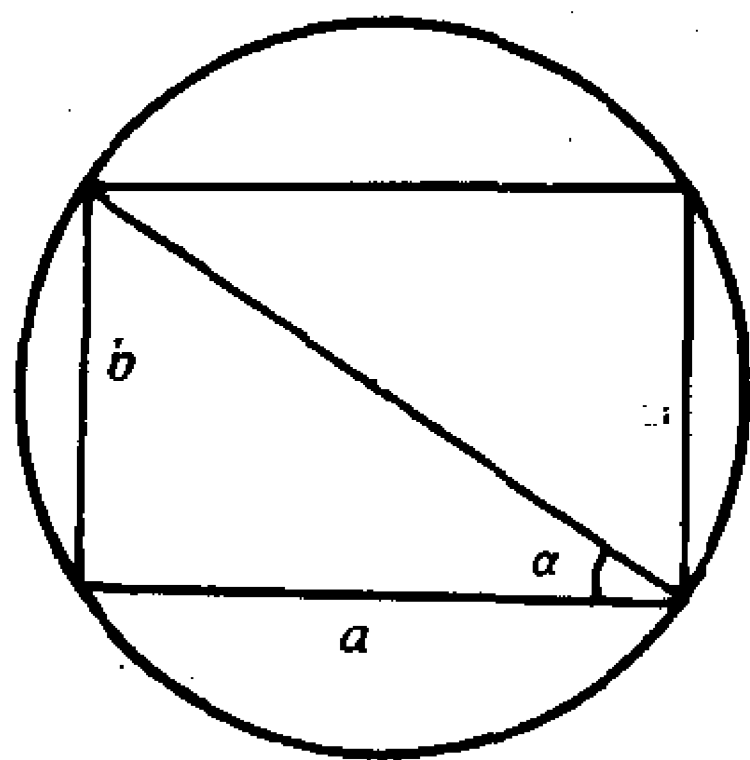


图 2—1

$$\begin{cases} a=2R\cos\alpha \\ b=2R\sin\alpha \end{cases}$$

代入 $S=ab$，得

$$S=4R^2\sin\alpha\cos\alpha=2R^2\sin2\alpha$$

故显然当 $2\alpha=90°$ 即 $\alpha=45°$ 时，面积 S 有最大值 $2R^2$，这时 $a=b$，即该矩形亦为正方形.

评注 本例如果根据 $\begin{cases}S=ab\\a^2+b^2=4R^2\end{cases}$ 化为 $S=a\sqrt{4R^2-a^2}$，则该极值问题若用初等方法求这个函数的极值是比较困难的．而上述的解法由于引入辅助变数 α，沟通了变量 a、b 和定量 R 之间的联系，从而起到了化难为易的作用．这里的 α 也是参数．

由以上两例不难看出，参数是一种变数，一种辅助变数，它虽不是问题的主要对象，却涉及着主要对象的根本性质，它是由于解决问题的需要而引进的，参与了解决问题的论证或计算过程，起着一个桥梁作用，到问题解决之时，它也就被消去了．所以，一般地讲，参数就是在研究问题的过程中引进的一个变数．在数学里，把主要变数以外的可以变化的数叫做参变数，简称参数（“参数”的英文词是 parameter，其中“para”有“旁、辅助”等意，而 meter 有“计量”之意，按此词的结构可直译为“从旁参与的辅助量”）．

2．*含有参数的方程*

该名词可以顾名思义．

例 3 (1) $y=kx+3$ (2.1—1)

(2) $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ (2.1—2)

评注 在上述两个方程中 k、r 均为参数，因此它们都是含有参数的方程．显然，由于在式(2.1—1)中给参数 k 以不同的数值，式(2.1—1)所代表的直线的倾斜角即随之而发生变化，但所有直线都通过同一点(0，3)，故式(2.1—1)代表中心直线系；同理，式(2.1—2)表示以原点为圆心、r 为半径的同心圆系．

所以，含有参数的方程在几何上表示一簇曲线（或直线），其中的曲线随参数的取值不同而变动．故含有参数的方程也

叫做曲线系的方程.

3. 曲线的参数方程

例 4 以初速 V_0,仰角 $\alpha(0° < \alpha < 90°)$发射一发炮弹(不计空气阻力),求炮弹的运动轨迹方程,并指出运动轨迹是怎样的曲线。

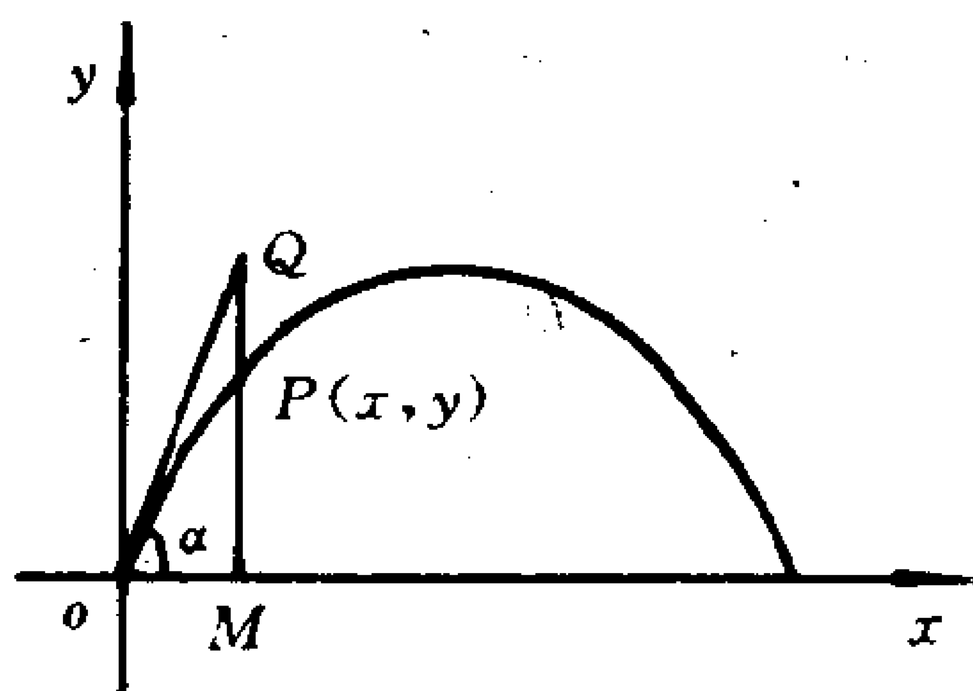


图 2—2

解 如图 2—2,以发射点为坐标原点 o,过 o 的水平直线为 x 轴建立直角坐标系. 由力学知识,可把初速 V 分解为水平分速度和铅直分速度. 由于位移在水平方向的分量为匀速运动,而在铅直方向的分量为匀速上升和自由落体运动的合成,于是在某一时刻 t,炮弹 P 的坐标为

$$\begin{cases} x = oM = oQ \cdot \cos\alpha = V_0 t\cos\alpha \\ y = MP = MQ - PQ = V_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$(0 \leqslant t \leqslant T, t \text{ 为参数}) \qquad (2.1—3)$$

其中 T 是发射炮弹落地的时间. 在时间 t 的允许值范围$[0, T]$里的每一个确定的值 t 和曲线上唯一的一个点 P 相互对应,故式(2.1—3)就是炮弹轨迹的参数方程. 从中消去 t,便得

$$y = x\text{tg}\alpha - \frac{g}{2V_0^2\cos\alpha}x^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant V_0 T\cos\alpha) \qquad (2.1—4)$$

此即炮弹轨迹的普通方程,显然它表示抛物线的一部分.

评注 分析上例容易发现,炮弹运动轨迹上任意一点的坐标(x,y)都可由某 t 值通过方程(2.1—3)得到. 反之,对于每一个 t 值$(0 \leqslant t \leqslant T)$,由方程(2.1—3)所确定的 x、y 为坐标的点,就是炮弹在时刻 t 所处的位置. 这与中学数学里曲线的

普通方程定义相类似.

于是得到曲线的参数方程定义.

定义 2.1.1 设有曲线 Γ 及方程

$$\begin{cases} x=\Phi(t) \\ y=\Psi(t) \end{cases} \tag{2.1—5}$$

如果(i)曲线上任何一点 $P(x,y)$ 可由某一 t 值通过式(2.1—5)给出;(ii)对于 t 的每一个允许值,由式(2.1—5)确定的 x、y 为坐标的点 $P(x,y)$ 都在曲线 Γ 上.

则称式(2.1—5)为曲线 Γ 的参数方程,t 称为参变量或参数,而曲线 Γ 则称为方程(2.1—5)式的图形.

评注 在具体问题中,参数方程中的参数常常有具体意义,例 4 中 t 是具有物理意义的时间. 在下例中将说明参数也可能具有几何意义,当然参数并不是必须具有某种实际意义.

例 5 一个半径为 r 的定圆,沿一直线滚动,求圆周上一定点 P 的轨迹方程.

解 如图 2—3,取已知直线作为 x 轴,圆上定点 P 滚到和直线接触时直线上的那一点 o 作为原点建立直角坐标系. 显然,P 点的位置和半径 r 以及张角 $\angle ACP=\alpha$ 有关,故用 α 作为参数. 这时,若作 $PQ/\!/x$ 轴,则有

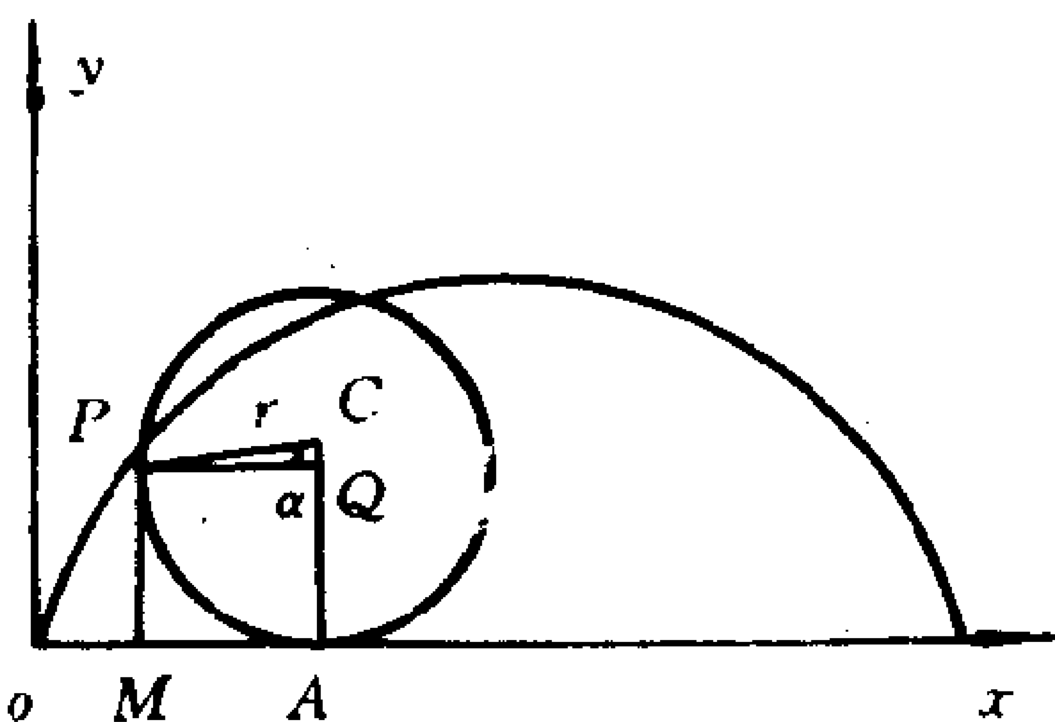


图 2—3

$$MP=AQ=AC-QC=r-r\cos\alpha$$

$$oM=oA-MA=oA-PQ=oA-r\sin\alpha$$

$$\because oA=弧\overset{\frown}{PA},而\overset{\frown}{PA}=\alpha r$$

$$\therefore \begin{cases} x = oM = \alpha r - r\sin\alpha \\ y = MP = r - r\cos\alpha \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数})$$

上式即为参数方程，这曲线在数学上称为摆线，又叫旋轮线. 它的形成正如一个骑自行车的人，滚动的车轮偶然从地面上粘起一张糖纸，当车轮继续向前时，这张糖纸就在空中画出了一条摆线，车轮每旋转一周，糖纸就画出摆线的一拱.

评注 该例如果不用参数去建立其轨迹方程是很难的.（例 4 也是这样）而在某些类型的参数方程建立起来之后，不仅对于以后研究曲线的性质有益，而且还可用来解决许多本来不好解决的物理与数学问题（参见 § 2.3）.

据定义 2.1.1 以及对两例的分析知，所谓曲线的参数方程应包括两层意义：

(i)这条曲线 Γ 上的点都可以由方程(2.1—5)来确定；

(ii)该方程(2.1—5)所确定的点都在这条曲线 Γ 上.

评注 1° 动点的轨迹与它的图形（曲形）及其方程（包括普通、参数方程）可以看成是一回事. 如果说曲线以及动点的运动的几何规律仅仅是这种运动的几何特征，方程只不过是这种运动的代数特征而已. 直角坐标系的建立使得曲线 Γ 的图形与它的方程(2.1—5)式这两种特征有机的融合为一体. 如果用集合观点来看，易知构成这条曲线 Γ 的点集与方程(2.1—5)的解析确定的点集是同一集.

2° 定义 2.1.1 并不是曲线参数方程的唯一定义；由中学几何中的原命题与其逆命题同真同伪的原理，令将定义 2.1.1 中的条件(i)与(ii)的其中一个或两个用相应的逆否命题来代替，就可以得出其他的三个等效的定义，它们的组成形式分别为：

$$\begin{cases}\text{(i)} \\ \text{(ii) 的逆否;}\end{cases}\begin{cases}\text{(i) 的逆否} \\ \text{(ii);}\end{cases}\begin{cases}\text{(i) 的逆否} \\ \text{(ii) 的逆否}\end{cases}$$

今后将根据研究问题的方便而采用其中的一个.

值得一提的是,$y=f(x)$实际上可以看作是一种特殊的参数方程,这只要令 $x=t$ 就有

$$\begin{cases}x = t \\ y = f(t)\end{cases}$$

由此可见参数方程的概念比形如 $y=f(x)$的普通方程更为一般,因此,应用范围也更宽广,很多学科(如微分几何、代数几何、力学等)所研究的曲线都采用参数方程的表达形式.

二、参数方程与普通方程的互化及互化常用方法

如前所述,同一条曲线往往既可用普通方程,也可以用参数方程来表达它上面的点的流动坐标之间的关系. 由于解题的需要不同,有时利用曲线的参数方程较为方便,有时则利用曲线的普通方程更方便. 它们两者的关系如何?既然它们都是同一条曲线的不同代数形式之特征反映,这种密切关系,从理论上来说就是它们可以相互转化.

在例 4 中,曾把参数方程化为普通方程,当时只是形式地从参数方程中消去参变量而求得轨迹的. 这样做,虽然在很多情况下是可行的,但是由于事先没有建立方程等价的明确概念,因此有些问题就得不到确定的答案. 例如,对于参数方程

$$\begin{cases}x = \sqrt{t} \\ y = -\sqrt{t}\end{cases}$$

如果仅仅从形式上消去方程中的参数 t,于是就可能得到方程 $y=-x$ 或 $y^2=x^2$, $y^3=-x^3$ 等等,其中究竟哪一个是所求的方程呢? 这就有必要建立以下概念.

定义 2.1.2 设曲线 Γ 有参数方程(2.1—5)式和普通方程

$$F(x,y)=0 \qquad (2.1\text{—}6)$$

如果对于每个 t 的允许值，由方程(2.1—5)所确定的(x,y)都满足方程(2.1—6)，并且满足式(2.1—6)的每一对(x,y)都可以由某一 t 值能由式(2.1—5)得出，则称式(2.1—6)为式(2.1—5)的普通方程，又称(2.1—5)为(2.1—6)的参数方程，并称(2.1—5)与(2.1—6)是等价的.

评注 这一定义明确了参数方程与普通方程的互化是指等价互化，实质上就是把曲线 Γ 的一种解析表示式化为另一种解析表达式，同时注意它们的等价性(或者说同解性).

因此，$\begin{cases}x=\sqrt{t}\\ y=-\sqrt{t}\end{cases}$的普通方程显然应为 $y=-x(x\geqslant 0)$

1. 化参数方程为普通方程

设有参数方程

$$\begin{cases}x=\Phi(t)\\ y=\Psi(t)\end{cases} \qquad (2.1\text{—}5)$$

通常采用"消去法"来化式(2.1—5)为普通方程，其一般步骤为：

①从式(2.1—5)中消去参变量 t，求得关于 x、y 的直角坐标方程 $F(x,y)=0$

②验证方程式(2.1—5)与 $F(x,y)=0$ 的等价性(按定义 2.1.2).

消去 t 的方法通常多种多样，以下介绍代入消参法、平方消参法、乘除消参法，以及利用三角、代数恒等式进行加减消参的其它方法.

(1)代入消参法：在一个方程中解出关于参数的表达式，

代入另一方程即可消去参数.

例 6 把下列曲线的参数方程化为普通方程.

(1) $\begin{cases} x=V_0t\cos\alpha \\ y=V_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant T)$

(2) $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=4t^2+3t-1 \end{cases}$ (t 为参数)

解 (1)从第一式得 $t=\dfrac{x}{V_0\cos\alpha}$,代入第二式得

$y=\dfrac{V_0\sin\alpha}{V_0\cos\alpha}x-\dfrac{1}{2}g\dfrac{x^2}{V_0^2\cos^2\alpha}$即 $y=-\dfrac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x^2+(\mathrm{tg}\alpha)x$
$(0\leqslant x\leqslant V_0T\cos\alpha)$

(2)由 $x=2t-1$ 得 $t=\dfrac{x+1}{2}$并代入第二式,得 $y=(x+1)^2+\dfrac{3}{2}(x+1)-1=x^2+\dfrac{7}{2}x+\dfrac{3}{2}$

评注

1° 一般较简单的参数方程多可采用代入法消去参数.

2° 这两题的验证步骤是因为这里的代入手续显然保证了 x 与 y 的同解性,故省略.

(2)平方消参法:若参数方程中含有某些三角函数式或一些特殊的代数式,这时可考虑平方消参法.此法常利用的关系有:

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\sec^2\theta-\mathrm{tg}^2\theta=1$, $\csc^2\theta-\mathrm{ctg}^2\theta=1$,
$\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2+\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2=1$ 及 $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ 等

例 7 化下列参数方程为普通方程.

(1) $\begin{cases} x=a\sec\theta \\ y=b\mathrm{tg}\theta \end{cases}$ (θ 为参数)

(2) $\begin{cases} x=\frac{a}{2}(t+\frac{1}{t}) \\ y=\frac{b}{2}(t-\frac{1}{t}) \end{cases}$（其中 t 为参数，$a\neq 0,b\neq 0$）

解 (1)由原方程得

$$\begin{cases} \frac{x}{a}=\sec\theta \\ \frac{y}{b}=\mathrm{tg}\theta \end{cases}$$

两式平方相减得 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

(2)因为 $a\neq 0,b\neq 0$，故原方程可化为

$$\begin{cases} \frac{2x}{a}=t+\frac{1}{t} \\ \frac{2y}{b}=t-\frac{1}{t} \end{cases}$$

由此得
$$\begin{cases} \frac{4x^2}{a^2}=t^2+2+\frac{1}{t^2} & (1) \\ \frac{4y^2}{b^2}=t^2-2+\frac{1}{t^2} & (2) \end{cases}$$

(1)—(2)，得普通方程

$$\frac{4x^2}{a^2}-\frac{4y^2}{b^2}=4 \quad 或 \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{3}$$

验证等价性：上述的推导已说明了定义 2.1.2 的第一点，以下只需说明反过来的事即第二点即可.

事实上，设 (x_1,y_1) 为方程(3)的任意一组解，即有

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4}$$

由 $x_1=a^2(1+\frac{y^2}{b^2})\geqslant a^2$，因此总可设

$$x_1=\frac{a}{2}(t_1+\frac{1}{T_1})\quad(t_1\neq 0)\tag{5}$$

将式(5)代入式(4),得

$$\frac{y_1}{b^2}-\frac{x_1}{a^2}-1=\frac{\frac{a^2}{4}(t_1+\frac{1}{T_1})^2}{a^2}-1=\frac{t_2-2+\frac{1}{t_1}}{4}$$

$$=\left(\frac{t_1-\frac{1}{t_1}}{2}\right)^2$$

得 $\quad y_1=\pm\frac{b}{2}(t_1-\frac{1}{t_1})\qquad(6)$

其实对于 $\quad y_1=-\frac{b}{2}(t_1-\frac{1}{t_1})$只要令 $t_2=\frac{1}{t_1}$,即得

$$y_1=-\frac{b}{2}(t_1-\frac{1}{t_1})=-\frac{b}{2}(\frac{1}{t_2}-t_2)=\frac{b}{2}(t_2-\frac{1}{t_2})$$

同时,$t_2=\frac{1}{t_1}$代入(5),得

$$x_1=\frac{a}{2}(t_1+\frac{1}{t_1})=\frac{a}{2}(t_2+\frac{1}{t_2})$$

这就充分表明 x_1 与 y_1 都可表示为:

$$\begin{cases}x_1=\frac{a}{2}(t_2+\frac{1}{t_2})\\ y_1=\frac{b}{2}(t_2-\frac{1}{t_2})\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}x_1=\frac{a}{2}(t_1+\frac{1}{t_1})\\ y_1=\frac{b}{2}(t_1-\frac{1}{t_1})\end{cases}$$

评注 例 7(1)的验证可以仿题(2)进行,限于篇幅这里省略. 并声明在以后的例题中除特殊情况外一般均省略验证步骤.

(3)乘除消参法:利用 $k\cdot\frac{1}{k}=1(k\neq0)$,$\mathrm{tg}\theta\cdot\mathrm{ctg}\theta=1$ 或二式相除约简后再使用代入法,即可消去参数.

例 8 消去$\begin{cases}x\sin2\theta+\cos2\theta=1\\ y\sin2\theta-\cos2\theta=1\end{cases}$中的参数 θ,化为普通方

程.

解 由第一式可得

$$x=\frac{1-\cos2\theta}{\sin2\theta}=\operatorname{tg}\theta$$

由第二式可得

$y=\dfrac{1+\cos2\theta}{\sin2\theta}=\operatorname{ctg}\theta$ 二式相乘，得 $xy=1$

评注 消参法的几点说明：

1° 上面介绍的几种消参法并不指一切参数方程都有具体办法消去参数，当然这并不是说理论上不可能，而是事实上至今还没有一个一般的方法来消去参数，例如参数方程

$$\begin{cases}x=t-\operatorname{tg}t\\y=t^2+\sin t\end{cases}\quad(t\text{ 为参数})$$

目前尚无妥当的方法来消去参数.

2° 参数方程和消去参数后的普通方程是否等价？或者说，它们是否代表同一曲线？这是不容忽视的，否则将导致解答的错误.

例 9 化参数方程

$$\begin{cases}x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\[2ex]y=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}\quad(t\text{ 为参数})\tag{1}$$

为普通方程.

解 因为 $x^2+y^2=\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2=1$

故所求的普通方程 $x^2+y^2=1$

评注 这里(1)与(2)并不等价，因为(2)代表的曲线是单位圆，而(1)所代表的曲线是单位圆上去掉$(-1,0)$点的所有点. 事实上，由(1)可知

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2-(1+t^2)}{1+t^2}=\frac{2}{1+t^2}-1$$，显然 $x\neq-1$

所以　(1)的普通方程应为

$$x^2-y^2=1(x\neq-1)$$

例 10　将参数方程 $\begin{cases}x=t^2-3\\y=t^4-4\end{cases}$　　(1)

化为普通方程.

解　$\because t^2=x+3$

$\therefore$(1)的普通方程为 $y=(x+3)^2-4$　　(2)

评注　从取值范围看,(2)中可以是一切实数,而(1)中 $x\geqslant-3$. 从图形来看,(1)的图形是抛物线的一部分,而(2)的图形则是一条抛物线. 因此(1)的普通方程应为

$$y=(x+3)^2-4\quad(x\geqslant-3)$$

2. 化普通方程为参数方程

设曲线 Γ 的普通方程

$$F(x,y)=0\qquad(2.1—6)$$

通常化(2.1—6)式为参数方程(2.1—5)式有两种方法,以下分别介绍.

(1)直接代入法

步骤如下:

(i)选取适当的变量 t 作为参数,把 x(或 y)表为 t 的函数.

$$x=\Phi(t)(\text{或 } y=\Psi(t))$$

(这种假设应使函数 $\Phi(t)$(或 $\Psi(t)$)能取遍方程(2.1—6)式中 x(或 y)的所有允许值).

(ii)把(1)式代入式(2.1—6),并从方程 $F[\Phi(t),y]=0$ 中解出 $y=\Psi(t)$(或从方程 $F[x,\Psi(t)]=0$ 中解出 $x=\Phi(t)$),于是得到方程

$$\begin{cases} x = \Phi(t) \\ y = \Psi(t) \end{cases} \tag{2}$$

(iii)验证方程(2)与式(2.1—6)的等价性

如果方程 $y=\Psi(t)$ 与方程 $F[\Phi(t),y]=0$ 同解(或方程 $x=\Phi(t)$ 与方程 $[x,\Psi(t)]=0$ 同解),则立即断定(2)就是(2.1—6)的参数方程,不需要进行验证. 否则应按定义 2.1.1 来验证.

例 11 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程.

解 见图 2—4,以 a 为半径作辅助圆,设 $P(x,y)$ 为椭圆上任意一点,过 P 作 x 轴的垂线交圆于点 M,取离心角 $\angle xoM=\theta$ 为参数,于是

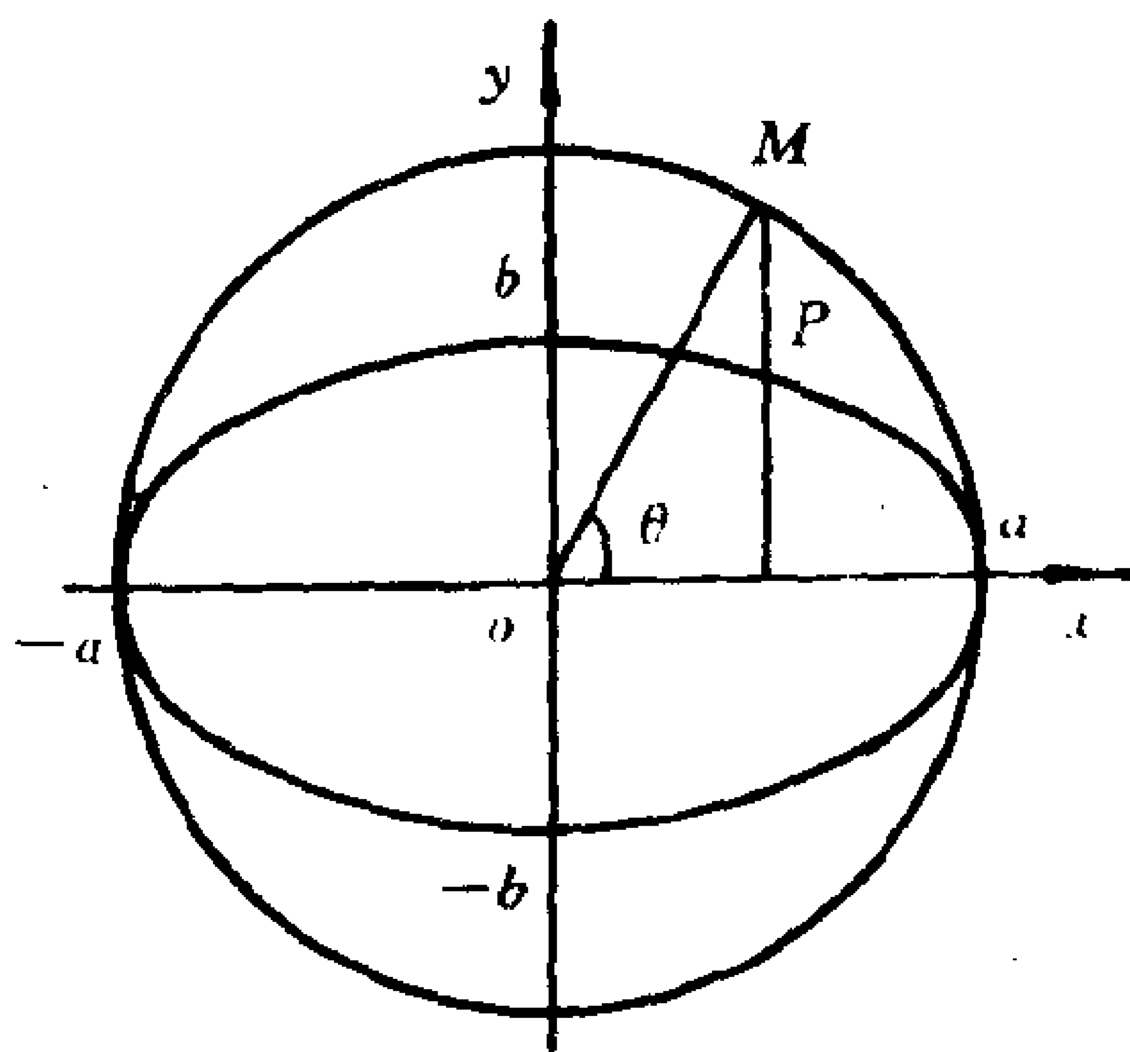


图 2—4

$$x=a\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi) \tag{1}$$

将(1)代入原方程,得

$$\frac{a^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

由此得

$$y^2=b^2(1-\cos^2\theta)=b^2\sin^2\theta \tag{2}$$

由于点 P 与它的离心角位于同一象限,因此 P 的纵坐标 y 与 $\sin\theta$ 的符号一致,故

$$y=b\sin\theta \tag{3}$$

与(2)同解,由此可知椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta < 2\pi) \tag{4}$$

(因$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$与方程(4)的图形是一致的，故通常取消 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的限制，以$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$作为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的参数方程).

直接代入法的关键在于如何适当的选取参数，通常选取参数的方法在如下四种：

(i)利用几何图形，选取适当的参数(如：角、斜率、弧长等).

比如，例 11 中的 θ(还可参见§2.2 中圆、直线、椭圆、双曲线、抛物线等的参数方程建立时参数的选择).

(ii)将已知方程适当变形，以便选取适当的参数和函数关系.

例 12 将抛物线方程 $y^2=2px$ 化为参数方程.

解 将方程 $y^2=2px$ 变形，得

$\frac{x}{y}=\frac{y}{2p}$,

令$\frac{x}{y}=\frac{y}{2p}=t$，可得

$$\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases} (t \text{ 为参数})$$

评注 对于类似于 $y^2=2px$ 这样的等积式，一般可作比例式变形.

(iii)利用恒等式(特别是三角恒等式)来选取适当的参数.

例 13 化双曲线方程 $xy=a^2$ 成参数方程.

解 利用三角恒等式 $\mathrm{tg}\theta\cdot\mathrm{ctg}\theta=1(\theta\neq\frac{k\pi}{2},k\in Z)$

设 $x=a\operatorname{tg}\theta$，可得参数方程

$$\begin{cases}x=a\operatorname{tg}\theta\\ y=ac\operatorname{tg}\theta\end{cases}\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<0 \text{ 或 } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

其中 θ 为参数.

评注 这里 θ 的选取应要求与 x、y 允许值即非零的一切实数相一致；比如本题就不能用恒等式 $\sin\theta\cdot\csc\theta=1$，因为 $|x|=|a\sin\theta|\leqslant|a|$. 一般来说，如果普通方程所确定的曲线是无(有)界的，那么化为参数方程时，选取的函数也应是无(有)界的.

(iv)化隐函数为显函数，以便选取适当的函数关系. 主要办法是利用二次方程的求根公式解出 y(或 x)，然后考虑根式下被开方式的特点来选择适当的参数.

例 14 将下列二次曲线化为参数方程.

(1) $x^2+2xy+y^2+2x-2y=0$

(2) $17x^2-16xy+4y^2-34x+16y+13=0$

解 (1)解出 $\quad y=1-x\pm\sqrt{1-4x} \qquad (1)$

设 $\quad x=t-t^2$，则

$1-4x=1-4t+4t^2=(1-2t)^2$

代入(1)式得 $\quad y=1-t+t^2\pm(1-2t)$

于是得参数方程

$$\begin{cases}x=t-t^2\\ y=t^2-3t+2\end{cases}(t \text{ 为参数})\text{或}\begin{cases}x=t-t^2\\ y=t^2+t\end{cases}(t \text{ 为参数})$$

(2)解出 $\quad y=2(x-1)\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-(x-1)^2}$

因 $\quad 4-(x-1)^2\geqslant0$

所以 $\quad (x-1)^2\leqslant4 \quad$ 即 $\quad \frac{(x-1)^2}{2^2}\leqslant1$

亦即 $\quad -1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant1$

故可设 $\frac{x-1}{2}=\cos\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$

则 $x=1+2\cos\theta$

代入原方程得 $y=4\cos\theta\pm\sin\theta$

为了保持 $y=\Psi(\theta)$的单值性，只要把 θ 的取值范围扩大到$[0,2\pi)$，则上式中正负号任取一个即可，于是得参数方程

$$\begin{cases}x=1+\cos\theta\\y=4\cos\theta+\sin\theta\end{cases}(\theta\text{ 为参数 }0\leqslant\theta<2\pi)$$

或 $$\begin{cases}x=1+2\cos\theta\\y=4\cos\theta-\sin\theta\end{cases}(\theta\text{ 为参数 }0\leqslant\theta<2\pi)$$

评注 若取 $0\leqslant\theta<\pi$，则 y 的解析式正负号都要取，才能得到全部椭圆上的点.

(2) 间接代入法

步骤如下

(i)令 $y=f(t,x)$ （或 $x=g(t,y)$）； (1)

(ii)将(1)式代入直角坐标方程 $F(x,y)=0$ 中，并从方程 $F(x,f(t,x))=0$中解出$x=\Phi(t)$，或从方程$F(g(t,y),y)=0$ 中解出 $y=\Psi(t)$，于是得到方程 $F(x,y)=0$ 的参数方程

$$\begin{cases}x=\Phi(t)\\y=f(t,\Phi(t))\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=g(t,\Psi(t)\\y=\Psi(t)\end{cases}\tag{2}$$

(1)如果所给方程 $F(x,y)=0$ 中的最高次项与最低次项指数相差一次，常令 $y=tx$ 或 $x=ty$，并代入 $F(x,y)=0$ 中，若能解得 $x=\Phi(t)$，$y=\Psi(t)$且都是关于 t 的单值，则 $F(x,y)=0$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=\Phi(t)\\y=\Psi(t)\end{cases}$$

例 15 将下列普通方程化为参数方程：

(1)$y^2=2px$

(2)$x^3+y^3-3xy=0$

解　(1)令$x=ty$，代入原方程得$y^2=2pty$，由此得$y=2pt$及$y=0$($y=0$可并入$y=2pt$)再将$y=2pt$代入$x=ty$，得$x=2pt$故抛物线$y^2=2px$的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$$

(2)令$y=tx(t\neq-1)$代入原方程，得$x^3+(tx)^3-3x^2t=0$即$x^2[x(1+t^3)-3t]=0$

由此得　$x=\dfrac{3t}{1+t^3}$及$x=0$

合并起来，得$x=\dfrac{3t}{1+t^3}$　　(1)

将式(1)代入$y=tx$，得

$$y=\frac{3t^2}{1+t^3} \tag{2}$$

由式(1)、(2)得参数方程

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

(2)已知曲线$F(x,y)=0$上一点$P(x_0,y_0)$，常令$y-y_0=t(x-x_0)$代入$F(x,y)=0$中，若能解得$x=\Phi(t)$，$y=\Psi(t)$且都是关于t的单值函数，则$\begin{cases} x=\Phi(t) \\ y=\Psi(t) \end{cases}$即为所求曲线$F(x,y)=0$的参数方程. 但需注意，有时会失掉$t\to\infty$的一点.

例*16　将圆$x^2+y^2=R^2$(不含其上$(0,-R)$点)化为参数方程.

解　显然已知其上一点$(0,-R)$，故可令$y-R=tx$，代入得

$$\begin{cases} x = R\dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = R\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

这就是少一点$(0,-R)$的圆 $x^2+y^2=R^2$ 的参数方程.

评注 利用"代入法"化普通方程 $F(x,y)=0$ 为参数方程时，首先必须注意所选取的函数 $x=\Phi(t)$（或 $y=\Psi(t)$）的函数值集与 $F(x,y)=0$ 中的 x（或 y）的允许值集合应该相同；其次在选取函数关系时，应使所得参数方程中的两个函数 $x=\Phi(t)$（或 $y=\Psi(t)$）都是单值函数，否则将破坏等价性.

习 题 2.1

1. 某数加上 100 为完全平方数，加上 168 也是完全平方数，求此数（试引入参数来解）.

2. 将下列参数方程化为普通方程（其中 θ、t、λ、μ 为参数）：

(1) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{1+t} \\ y=\dfrac{t}{1+t^2} \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=\dfrac{a\cos\theta}{1+\cos\theta} \\ y=\dfrac{b\sin\theta}{1+\cos\theta} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=(a+x)\mathrm{tg}\theta \\ y=(a-x)\sin\theta \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x=1-4\cos^2\theta+3\sin^2\theta \\ y=1-3\cos^2\theta-4\sin^2\theta \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=2a\mathrm{tg}\theta \\ y=2a\cos^2\theta \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x=a\cos^4\theta \\ y=a\sin^4\theta \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} x=\dfrac{a\lambda^2-b\lambda}{1+\lambda^2} \\ y=\dfrac{b-a\lambda}{1+\lambda^2} \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x=10t\cos45° \\ y=10t\sin45°-50°t^2 \end{cases}$　　(10) $\begin{cases} x=\dfrac{\lambda a}{1+\sqrt{\lambda}} \\ y=\dfrac{\lambda b}{1+\sqrt{\lambda}} \end{cases}$ $(a>0)$

(11) $\begin{cases} x=\dfrac{3(\lambda^2-\mu^2)}{\lambda^2+\mu^2} \\ y=\dfrac{4\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2} \end{cases}$ (12) $\begin{cases} x=\dfrac{4}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}} \\ y=\cos(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}) \end{cases}$

3. 试将下列普通方程化为参数方程(要求用两种方法).

(1) $4x^2-y^2=4$

(2) $x^2+4y^2-6x+5=0$

4. 选择适当的方法，将下列普通方程化为参数方程.

(1) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ (2) $y^2=\dfrac{x^3}{2a+x}$

(3) $y^2=x^2$ (4) $x^3+y^3-3axy=0(a>0)$

(5) $y=1+3x^2$ (6) $y=2x^2-3x$

(7) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\ (a>0)$ (8) $y^2=4x^2-5x^3$

6. 在椭圆 $\dfrac{(x-3)^2}{4}+(y-2)^2=1$ 上取一点 $A(1,2)$，并以过 A 的直线的斜率 t 为参数，试求该椭圆的参数方程.

7. 消去 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=2+\cos\theta \end{cases}$ 中的参数 θ，并讨论该参数方程与所得的普通方程是否表示同一曲线?

§2.2 直线和二次曲线、一些常见曲线的参数方程

一、建立曲线的参数方程一般方法

解析几何中的一个基本问题就是由曲线求方程，因此在本章中“如果给出了曲线应满足的几何性质，如何建立相应的参数方程”便成为一个基本问题.

由§2.1尤其是§2.1中例4、例5的讨论，可以看出建立曲线的参数方程一般方法的具体步骤为：

(i)适当地建立平面直角坐标系；

(ii)选择适当的参数 t，并根据曲线上动点具有的几何特性，分别列出动点坐标 x、y 与 t 之间的关系式；

(iii)对上述的关系式进行必要的化简、整理，得一参数方程；

(iv)证明该参数方程确是所给曲线的参数方程；即要验证定义 2.1.1 中的两条，换言之就是要验证曲线上的点是否都满足该方程，满足该方程的点是否都在曲线上. 值得说明的是，在一般情况下，方程的建立过程往往保证了前一结论的正确性，故这时只需验证后一结论的正确性即可.

二、常见曲线的参数方程

1. 直线的参数方程

直线的参数方程可以有各种不同的形式，下面介绍两种典型形式的参数方程，它们的优点是：方程中每一个量都有它的几何意义，因此它们应用也比较广泛.

(1)直线的点斜式参数方程

问题 已知直线的倾斜角为 α，并且直线过定点 $P_0(x_0, y_0)$，求该直线的参数方程.

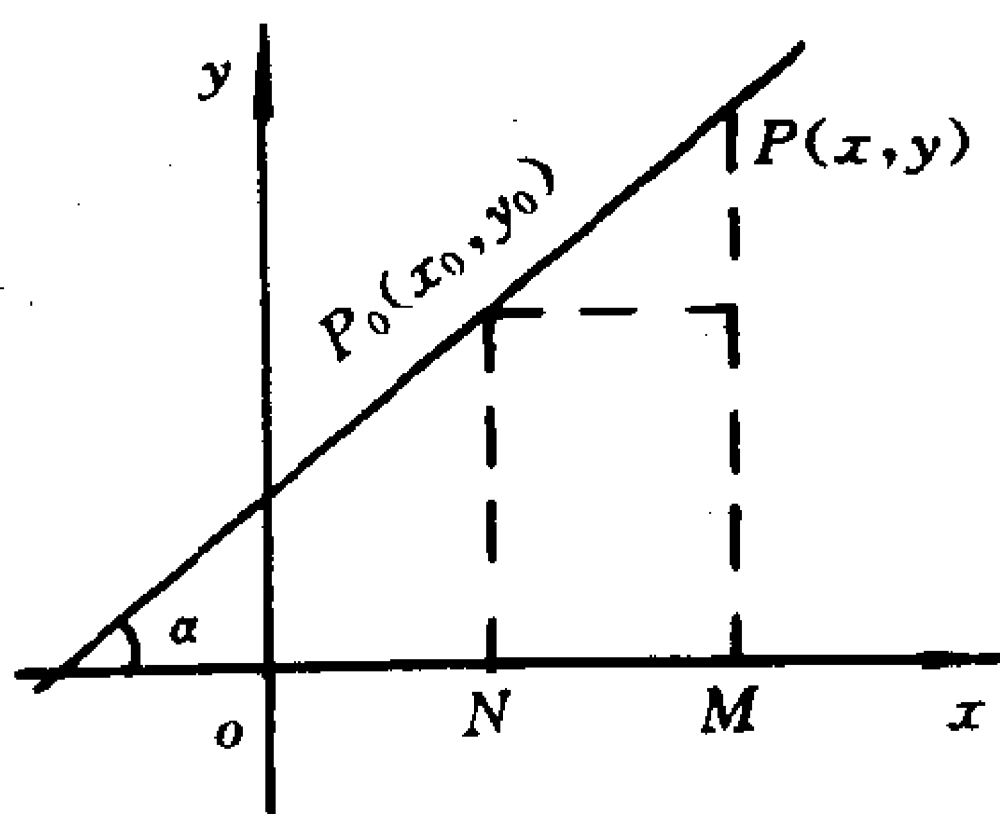


图 2—5

解 见图 2—5，设 $P(x, y)$ 为直线上任意一点，又设 δ 为点 P_0 到点 P 的有向距离(当 P 不与 P_0 重合时，δ 的符号规定如下：当 x 正半轴与射线 P_0P 的交角为 α 且 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ 时，$\delta>0$；当 x 正半轴与射线 P_0P 的交角为 $\alpha+\pi$ 时，$\delta<0$. 当 P 与 P_0 重合时，$\delta=0$)，由图 2—5，可知点 P 的坐标是

$$\begin{cases} x = oM = oN + NM = x_0 + \delta\cos\alpha \\ y = MP = MQ + QP = y_0 + \delta\sin\alpha \end{cases} \tag{1}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x = x_0 + \delta\cos\alpha \\ y = y_0 + \delta\sin\alpha \end{cases} \tag{2}$$

（其中 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y-y_0)^2} = \sqrt{\delta(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)} = |\delta|$）这时 $|\delta|$ 显然为 P_0 到 P 的距离. 反之，如果 (x_1, y_1) 满足式(2)，即存在某个 δ，使得

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \delta\cos\alpha \\ y_1 = y_0 + \delta\sin\alpha \end{cases} \tag{3}$$

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\alpha = 0$，由式(3)得 $x_1 = x_0$.

这就说明点 $P_1(x_1, y_1)$ 在过 $P_0(x_0, y_0)$ 且平行于 y 轴的直线上；若 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ 时，有 $\cos\alpha \neq 0$，由式(3)得

$$y_1 - y_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x_1 - x_0)$$

这说明点 $P_1(x_1, y_1)$ 且倾角为 α 的直线上.

综上所述，可知式(2)即为所求的参数方程.

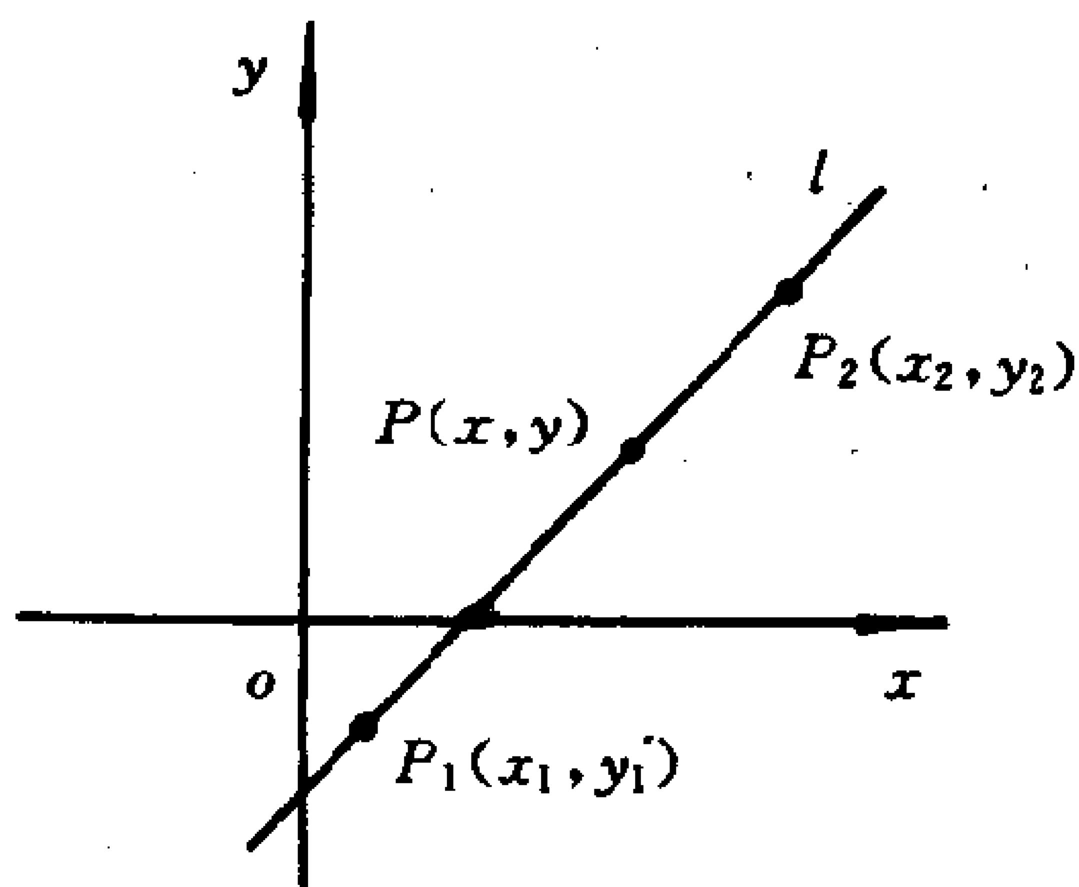
评注 显然 $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ （t 为参数，$a^2 + b^2 \neq 0$）也是直线的参数方程，考虑到式(2)中 $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$，所以上式所对应的标准点斜式参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\delta \\ y = y_0 + \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\delta \end{cases}$$

(2)直线的两点式参数方程

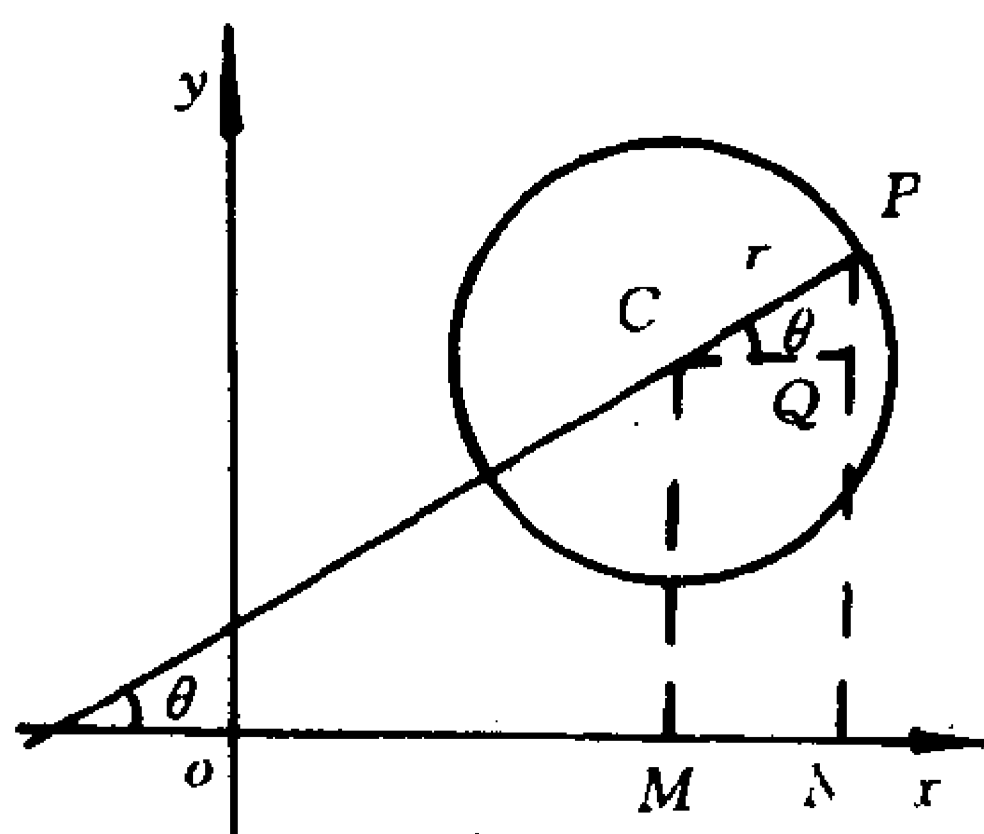
问题 已知直线上两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，见图 2—6，

求该直线的参数方程.



解 设 $P(x,y)$ 为直线 l 上的任意一点(P 异于 P_2),又设 λ 为有向线段 P_1P 与 PP_2 之比,即 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$,由中学解析几何定比分点公式得

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases} \quad (\lambda\neq -1) \tag{1}$$



其中 λ 是一变数,因为对于不同的点 P,λ 值也不同;反过来,对于不同的 λ 值,也对应着不同的点. 这时可将 λ 视为参数,显然(i)对于每一个不等于 -1 的参数 λ,都有 l 上的一个点 $P(x,y)$ 与之对应;(ii)反之,对于 l 上的除点 P_2 之外的每一个点 P,都有一个 λ 值与之对应,即有下面的一一对应关系存在:

$$\{\lambda/\lambda\in R,\lambda\neq -1\}\longleftrightarrow\{P/P\in l,P\neq P_2\}$$

由此,式(1)就是直线 l 的一个参数方程.

评注 严格地说,式(1)是不含 P_2 点的 l 直线的参数方程.

2. 二次曲线的参数方程

(1)圆的参数方程

问题　见图 2—7，一质点 P 以角速度 ω（常数）绕定点 $C(x_0, y_0)$ 作半径为 r 的圆周运动，求此质点运动轨迹的参数方程.

解　因为

$|CP|=r, \angle PCQ=\theta=\omega t$，这时

$$\begin{cases} x = oN = oM + MN \\ y = NP = NQ + QP \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=x_0+r\cos\theta \\ y=y_0+r\sin\theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数}) \tag{1}$$

由于 $\theta=\omega t$（t 为质点运动的时间），并代入式(1)得

$$\begin{cases} x = r\cos\omega t + x_0 \\ y = r\sin\omega t + y_0 \end{cases} (0 \leqslant t < +\infty, \text{且 } t \text{ 为参数}) \tag{2}$$

反之，如果(x_1, y_1)满足方程(1)或(2)，则必有

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = r^2$$

由中学解析几何知识可知点 $P_1(x_1, y_1)$在轨迹上.

综上可知，式(1)、(2)都是所求圆的参数方程.

评注

1° 今后除遇特殊情况要进行(iv)验证以外，一般正常情况(iv)就省略了.

2° 在以上两例中所出现的角 α、θ 都可以不限于锐角，其实对于锐角以外的其他情形可由诱导公式得.

(2)椭圆的参数方程

几何特征：任一动点到两定点距离之和为一定数.

问题　已知随圆的中心为 $O(0,0)$，焦点在 x 轴上，长半轴为 a，短半轴为 b，求椭圆的参数方程.

由§2.1 中例 11 可知所求的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} (0 \leqslant \theta < 2\pi) .$$

评注 若椭圆的中心在 $C(x_0, y_0)$，焦点在平行于 x 轴的直线上，a、b 不变. 这时仿 § 2.1 中例 11 同样的方法，可得相应的参数方程为：

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos\alpha \\ y = y_0 + b\sin\alpha \end{cases} \quad (0 \leqslant \alpha < 2\pi, \alpha \text{ 为参数})$$

(3) 双曲线的参数方程

几何特征：任一动点到两定点距离之差为一定数.

问题 已知双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$，其中 a、$b > 0$，求其参数方程.

解 如图 2—8 所示，作一圆和 x 轴交于 A 点，过 A 作圆的切线，然后作 $PQ /\!/ x$ 轴、和过 A 的切线交于 Q，$PM \perp x$ 轴. 这时设 $P(x, y)$ 为双曲线上任一点，$y = MP = AQ = b\text{tg}\angle AoQ$，又设 $\angle AoQ = \alpha$，则 $y = b\text{tg}\alpha$，此式代入双曲线的标准方程，即得 $x = a\sec\alpha$（或 $oM = oB \cdot \sec\alpha$）

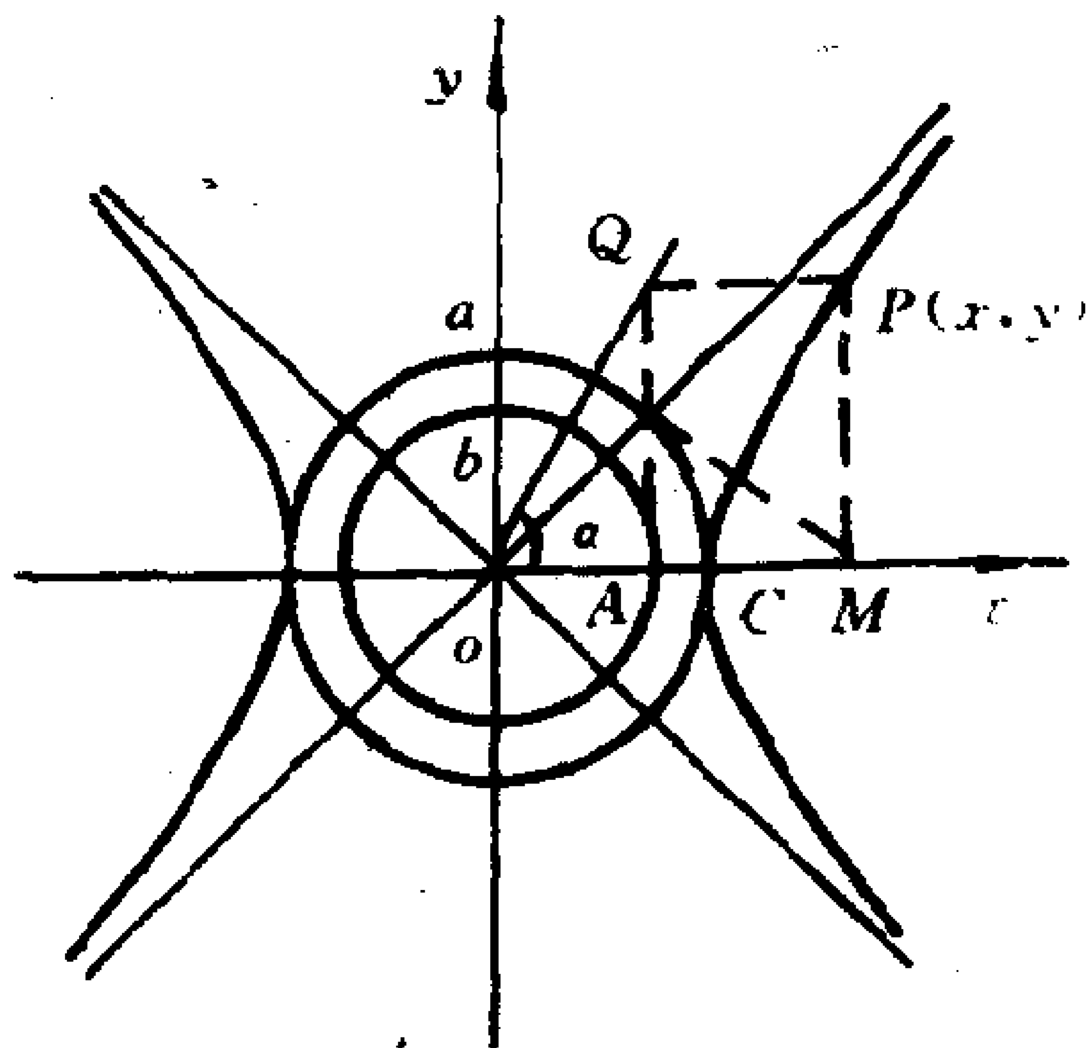


图 2—8

于是得双曲线的参数方程：

$$\begin{cases} x = a\sec\alpha \\ y = b\text{tg}\alpha \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数})$$

评注

1° 此处的 α 为离心角，它不是动径 oP 与 x 轴的夹角；

2° 若双曲线的方程为$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$,则其参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + a\sec\alpha \\ y = y_0 + b\operatorname{tg}\alpha \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数})$$

3° 双曲线的参数方程,常用的形式还有

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}(e^t + e^{-t}) \\ y = \frac{b}{2}(e^t - e^{-t}) \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

(4)抛物线的参数方程

几何特征　任一动点到一个定点和一条定直线的距离相等.

问题　已知抛物线的标准方程为$y^2=2Px$　(1)其中P为半焦距,求其参数方程.

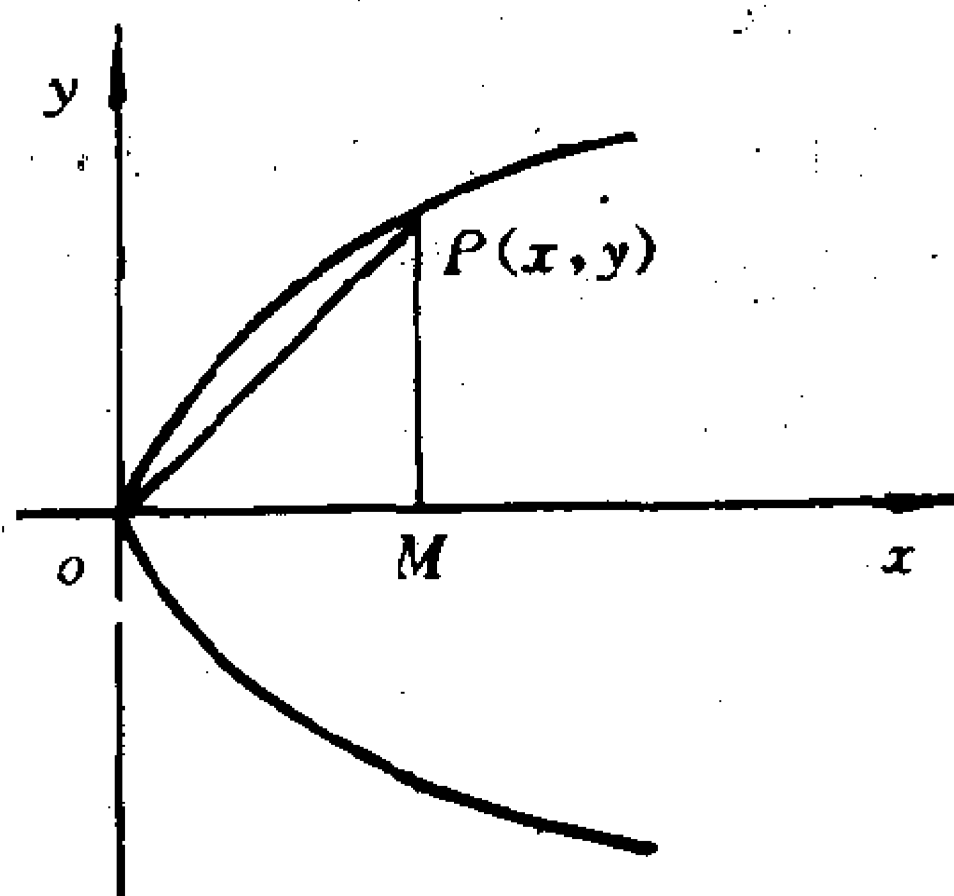


图 2—9

解　如图2—9所示,设$P(x,y)$为抛物线上任一点,因为对于给出一条过原点且还过P点的直线$y=kx$,这时,当P在抛物线变动时,k也相应变化,反之当k变化时,P点也随之变化,所以选择k为参数,于是将$y=kx$代入(1)得$k^2x^2=2Px$

立得直线$y=kx$与抛物线(1)交点的横坐标为:

$$x=0 \text{ 或 } x=\frac{2P}{k^2}$$

将$x=\frac{2P}{k^2}$代入$y=kx$,得抛物线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \dfrac{2P}{k^2} \\ y = \dfrac{2P}{k} \end{cases} \quad (k\text{ 为直线 }oP\text{ 的斜率,为参数}) \qquad (2)$$

评注

1° 为简洁起见,常在(2)中令 $t=\dfrac{1}{k}$ 于是得抛物线参数方程另一形式

$$\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases} \quad (t\text{ 为参数,几何意义为 }oP\text{ 斜率的倒数})$$

2° 若顶点坐标在 $C(x_0,y_0)$ 点,对称轴平行 x 轴,则抛物线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + 2Pt^2 \\ y = y_0 + 2Pt \end{cases} \quad (t\text{ 为参数})$$

3° 若抛物线的普通方程为 $x^2=2Py$,同理可得其参数方程为

$$\begin{cases} x = 2Pt \\ y = 2Pt^2 \end{cases} \quad (t\text{ 为参数})$$

所不同的是,此处 t 的几何意义是直线 oP 斜率.

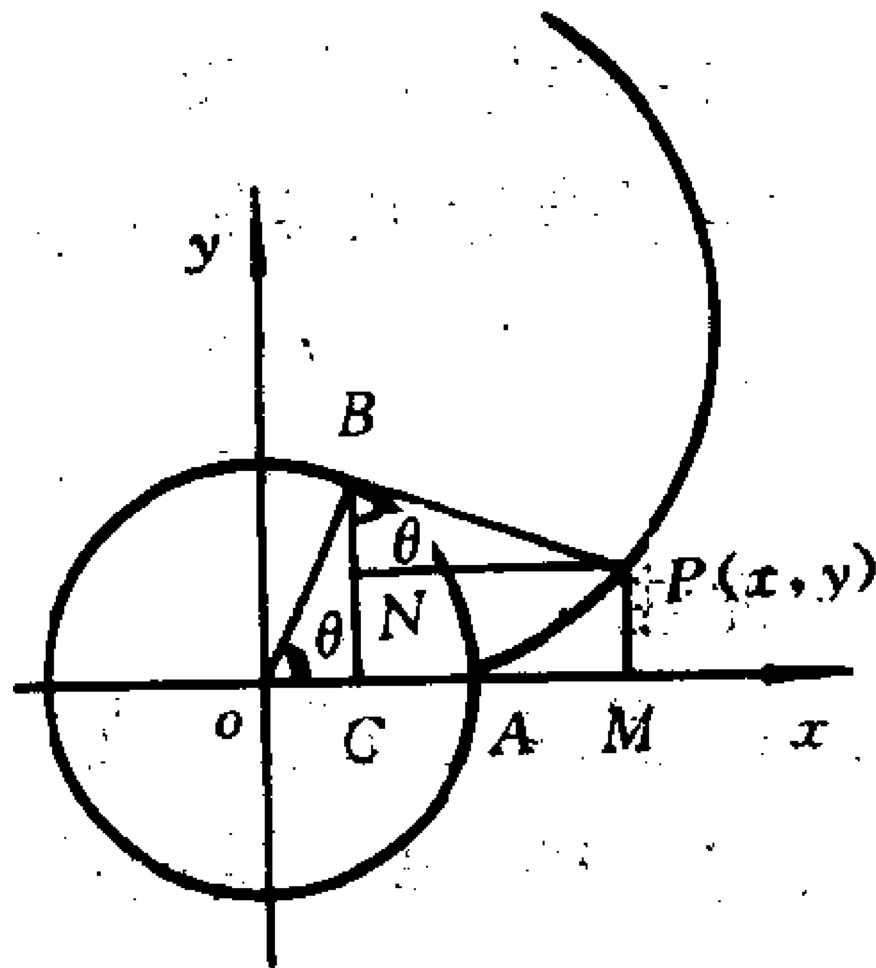


图 2 10

3. 几种常见曲线的参数方程

(1)圆的渐开线的参数方程

几何特征:一条直线与圆相切,当直线沿圆周作无滑动的滚动时,该直线上一个定点随着直线而运动的轨迹称为圆的渐开线或者圆的渐伸线,其中那个圆叫做基圆,那条直线叫做圆的渐开线之发生线.

问题 在直角坐标系下,求圆的渐开线的参数方程.

解 以基圆圆心 o 为原点，以直线 oA 为 x 轴建立直角坐标系（如图 2—10），设基圆的半径为 R，$P(x,y)$ 为渐开线上任一点，作 PB 切圆于 B，又过 B 作 $BC \perp oA$，垂足为 C，作 $PM \perp ox$，垂足为 M，再作 $PN \perp BC$，垂足为 N，取 $\angle AoB=\theta$（单位为弧度），则 $\angle PBN=\theta$，由于 $BP=\overset{\frown}{AB}=R\cdot\theta$，$oC=R\cos\theta$，$CM=NP=BP\sin\theta=R\theta\sin\theta$，且 $CB=R\sin\theta$，$NB=BP\cos\theta=R\theta\cos\theta$

$$\therefore \begin{cases} x=oM=oC+CM=R\cos\theta+R\theta\sin\theta \\ y=MP=CN=CB-NB=R\sin\theta-R\theta\cos\theta \end{cases}$$

（θ 为参数）

即为所求的圆的渐开线的参数方程.

评注 在机械传动中，传递动力的齿轮，大多采用圆的渐开线的齿形，因为这种齿轮具有啮合传动平稳、强度好、磨损少等优点.

(2)摆线（旋轮线）的参数方程

详细推导可参见 §2.1 中例 5，它的参数方程为

$$\begin{cases} x=r(\alpha-\sin\alpha) \\ y=r(1-\cos\alpha) \end{cases} \quad (-\infty<\alpha<\infty)$$

评注

1° 摆线由无限多支完全相同的分支组成，每一分支称为摆线的一拱，每一拱的高为 $2r$，宽为 $2\pi r$，生成圆每滚动一周形成一拱.

2° 对精度要求较高的钟表工业和仪表工业，齿轮的齿形用的是摆线的一部分.

3° 如果当一个圆沿定直线作无滑动的滚动时，动圆的定半径上（或半径的延长线上）一定点运动的轨迹，叫做短幅（或长幅）摆线.

(3)内摆线和外摆线的参数方程

几何特征： 一个动圆内切(或外切)于一个定圆作无滑动的滚动，动圆圆周上一定点运动的轨迹，叫做内摆线(或外摆线)，动圆叫做生成圆.

问题 1 在直角坐标系下求内摆线的参数方程.

解 设定圆的半径为 R，动圆的半径为 r，取定圆的圆心为原点，点 A 是动圆开始滚动时与定圆的切点，以 oA 为 x 轴建立直角坐标系(如图 2—11). 当动圆滚动到与定圆相切于点 B 时，圆周上定点所在位置为 $P(x, y)$，动圆圆心为 C. 设 $\angle AoB=\varphi$，根据定义可知 $\overset{\frown}{BP}=\overset{\frown}{AB}$，作 $PF\perp ox$，$CE\perp ox$，$PD\perp CE$. 又设 $\angle BCP=\theta$，则由于 $\overset{\frown}{BP}=r\theta$，$\overset{\frown}{AB}=R\varphi$，所以 $r\theta=R\varphi$，$\theta=\dfrac{R}{r}\varphi$

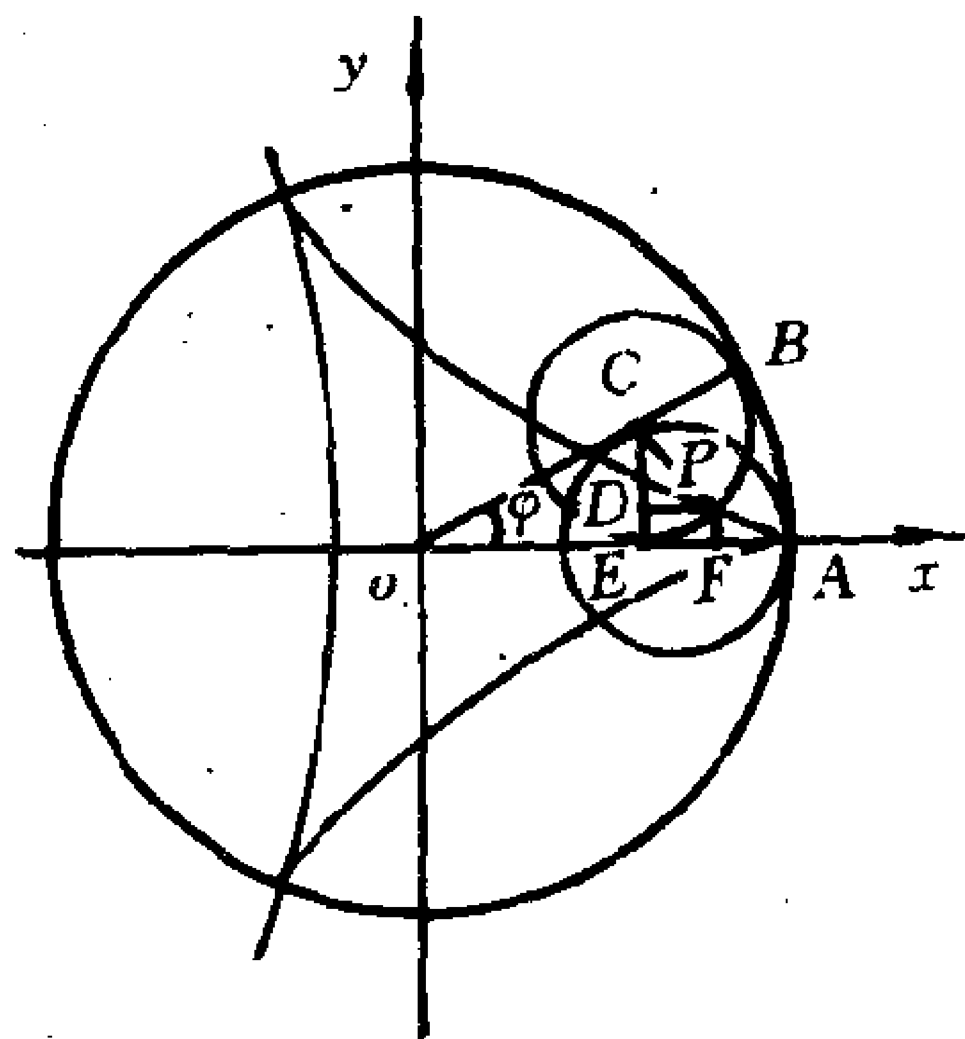


图 2—11

于是得 $\angle DCP=\angle DCB-\angle PCB=\dfrac{\pi}{2}+\varphi-\dfrac{R}{r}\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{R-r}{r}\varphi$

因此得 $x=oF=oE+EF=oE+DP=oC\cdot\cos\varphi+CP\cdot\sin\angle DCP=(R-r)\cos\varphi+r\cos\dfrac{R-r}{r}$

$$y=FP=EC-DC=oC\cdot\sin\varphi-CP\cdot\cos\angle DCP$$
$$=(R-r)\sin\varphi-r\sin\frac{R-r}{r}\varphi$$

所以，内摆线的参数方程为

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos\varphi + r\cos\dfrac{R-r}{r}\varphi \\ y = (R-r)\sin\varphi - r\sin\dfrac{R-r}{r}\varphi \end{cases}$$

评注 内摆线的参数方程中，当 $r=\frac{1}{4}$ 时，方程则变为

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4}R\cos\varphi + \dfrac{1}{4}R\cos 3\varphi \\ y = \dfrac{3}{4}R\sin\varphi - \dfrac{1}{4}R\sin 3\varphi \end{cases}$$

利用三角公式 $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$，$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$，则方程可简化为

$$\begin{cases} x = R\cos^3\varphi \\ y = R\sin^3\varphi \end{cases}$$

消去参数 φ，得直角坐标方程

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$$

该曲线称为四尖点内摆线，又叫星形线(见图 2—12).

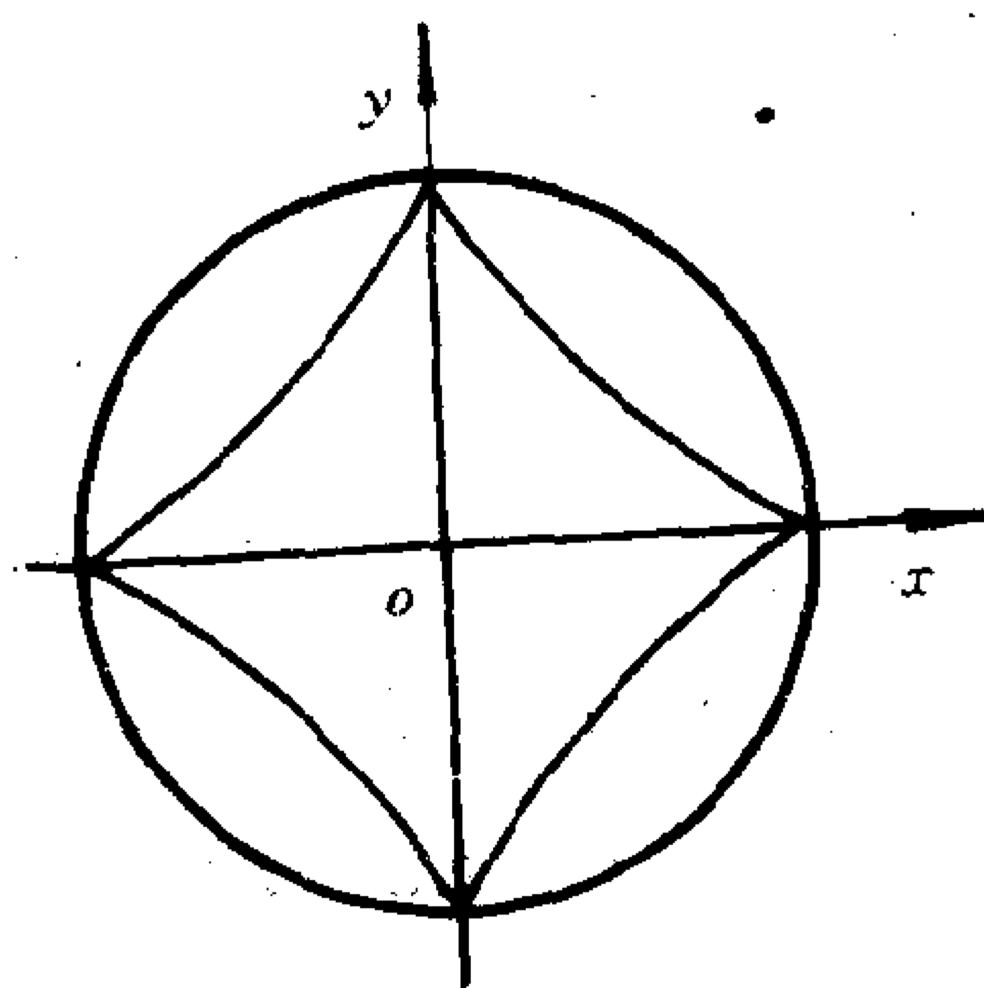


图 2—12

当 $r=\frac{1}{3}R$ 时，内摆线的方程变为

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}R\cos\varphi + \dfrac{R}{3}\cos 2\varphi \\ y = \dfrac{2}{3}R\sin\varphi - \dfrac{R}{3}\sin 2\varphi \end{cases}$$

该曲线称为三尖点内摆线(参见图 2—11).

问题 2 在直角坐标系，求外摆线的参数方程.

解 设定圆的半径为 R、动圆的半径为 r. 取定圆的圆心

为原点，点 A 是动圆在初始位置与定圆的切点，以 oA 为 x 轴，建立直角坐标系，见图 2—13. 当动圆滚到与定圆相切于点 B 时，圆周上定点所在位置为 $P(x,y)$. 动圆圆心为 C，设 $\angle AoB=\varphi$，根据定义，有 $\overset{\frown}{BP}=\overset{\frown}{AB}$，作 $PF\perp ox$，$CE\perp ox$，$PD\perp CE$. 又令 $\angle BCP=\theta$，则 $\overset{\frown}{BP}=r\theta$，而 $\overset{\frown}{AB}=R\varphi$，所以 $r\theta=R\varphi$，$\theta=\frac{R}{r}\varphi$

因为 $\angle PCD=\angle PCB-\angle DCB=\frac{R}{r}\varphi-(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\frac{R+r}{r}\varphi-\frac{\pi}{2}$

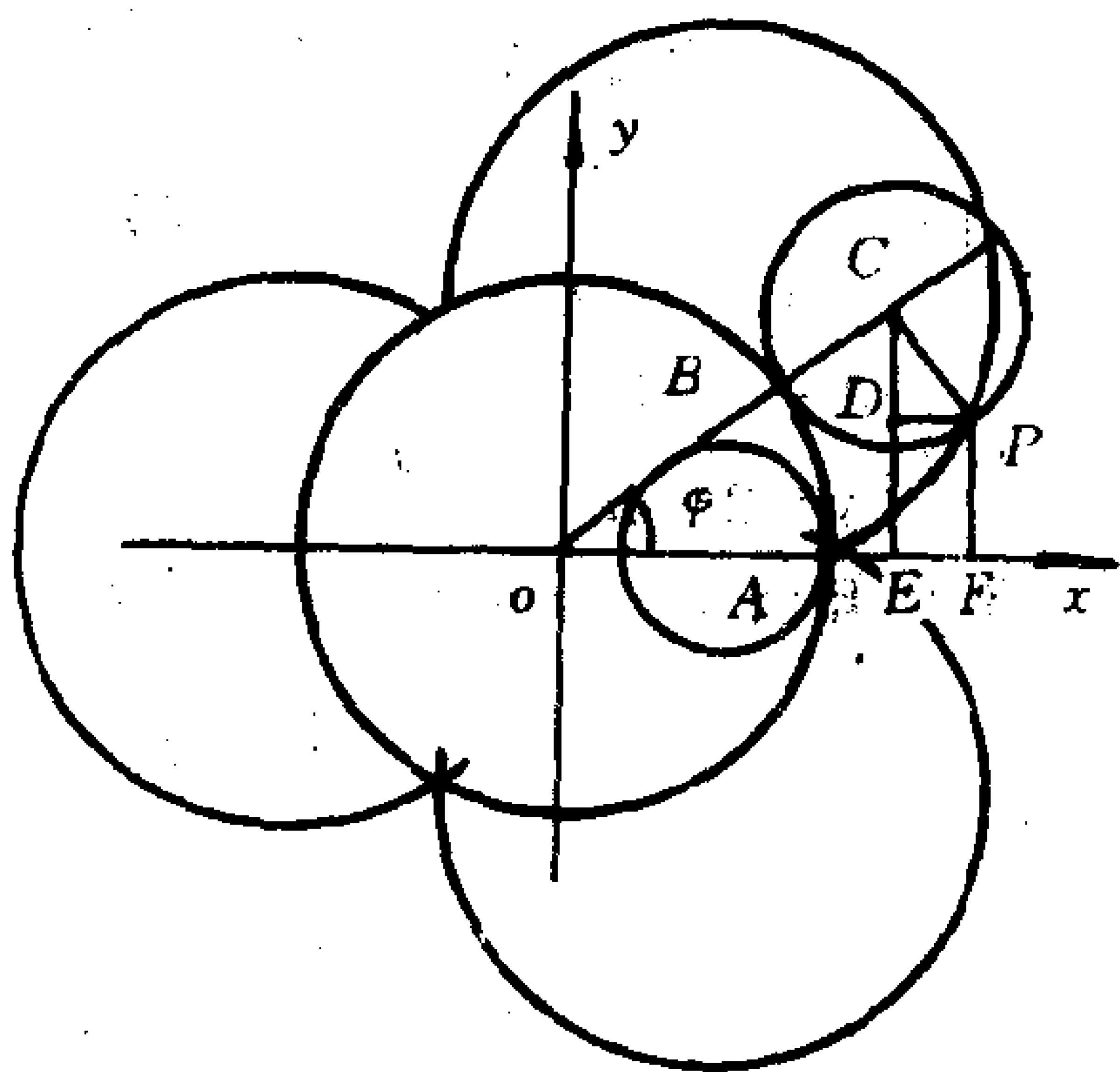


图 2—13

于是求得

$x=oF=oE+EF=oE+DP=(R+r)\cos\varphi-r\cos\frac{R+r}{r}\varphi$

$y=FP=EC-DC=(R+r)\sin\varphi-r\sin\frac{R+r}{r}\varphi$

所以，外摆线的参数方程是

$$\begin{cases}x=(R+r)\cos\varphi-r\cos\dfrac{R+r}{r}\varphi\\ y=(R+r)\sin\varphi-r\sin\dfrac{R+r}{r}\varphi\end{cases}\quad(\varphi\text{为参数})\qquad(1)$$

评注 当动圆在定圆的内部滚动时，动圆的定半径上（或其延长线上）一个定点的运动轨迹叫做短内摆线（或长内摆线）. 如果动圆在定圆的外部滚动，相应的轨迹则叫做短（或长）外摆线. 而式（1）中当 $R=r$ 时，曲线叫做心脏线.

习 题 2.2

1. 已知参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + \xi\cos\varphi \\ y = y_0 + \xi\sin\varphi \end{cases}$$

(1)指出当哪个量是参数时，方程代表直线，哪个量是参数时方程代表圆.

(2)指出 x_0、y_0、ξ、φ、x、y 的几何意义.

2. 将下列直线参数方程化为点斜式参数方程：

(1) $\begin{cases} x=3+\sqrt{3}\,t \\ y=-4-t \end{cases}$ （t 为参数）

(2) $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-4t \end{cases}$ （t 为参数）

3. 已知圆 $x^2+y^2=16$，求直线 l

$$\begin{cases} x = 1 + \dfrac{1}{2}t \\ y = -5 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t\text{ 为参数})$$

被圆截得弦长，并求弦的中点 Q 的坐标.

4. 求下列各对曲线的交点（t 为参数）

(1) $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=2-t \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x=\sqrt{5}\cos t \\ y=\sqrt{5}\sin t \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x=2(t+\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=p+t \\ y=t \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x=2pt^2 \\ y=2pt \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi) \end{cases}$ 与 $y=\dfrac{3}{2}$

5. 已知直线 l 的普通方程为 $4x-3y-b=0$.

(1)由 l 过点(3,2)及其斜率，将 l 的普通方程化成点斜式参数方

程；

(2)由 l 过点(3,2)及其与 x 轴的夹角，将 l 的普通方程化成点斜式参数方程；

(3)由 l 边点(3,2)及(0,−2)，将 l 的普通方程化成两点式参数方程.

6. 直线 $y=kx+b$ 和圆 $x^2+y^2=r^2$ 相交，求所得弦的中点坐标，若 k 为参数时，中点轨迹的参数方程代表什么曲线？若把 b 作为参数，中点轨迹的参数方程代表什么曲线.

§2.3 参数方程的应用

一、参数法

前面介绍的参数方程的有关知识，已展示出了一种方法即所谓参数法，即运用参数去解决数学问题的方法. 由于参数这种辅助变数活力非常旺盛，并且它在主要变数之间起到使之相互依存和彼此制约的纽带作用. 因此，参数法不论是在初等数学或是在高等数学方面都有着广泛的应用. 本节主要介绍参数法在初等数学中有哪些应用以及常用技巧，应用包括两个方面：一是求曲线的轨迹方程；二是研究曲线的性质.

参数法有直接与间接之分，所谓直接的参数法主要指利用已知曲线的现成的参数方程来解题；而间接的参数法运用的关键是恰当地选择参数，但参数的选择一般灵活性大，不易找到一般性的规律，因此本节将通过一定量的例题，向读者介绍一些最常用的“选参”方法.

二、常用参数法

1. 线段参数法

线段参数是指被选作参数的有向线段之数量；而线段参数法即指用线段参数去解决数学问题的方法. 值得一提的是

直线的点斜式参数方程中的参数就是线段参数，其几何意义的应用较为广泛.

例 1 在长为 a 的线段 AB 上有一动点 P，在 AB 的同侧，以 AP、PB 为边分别作等边$\triangle AMP$ 和等边$\triangle BNP$，求 MN 中点 Q 的轨迹.

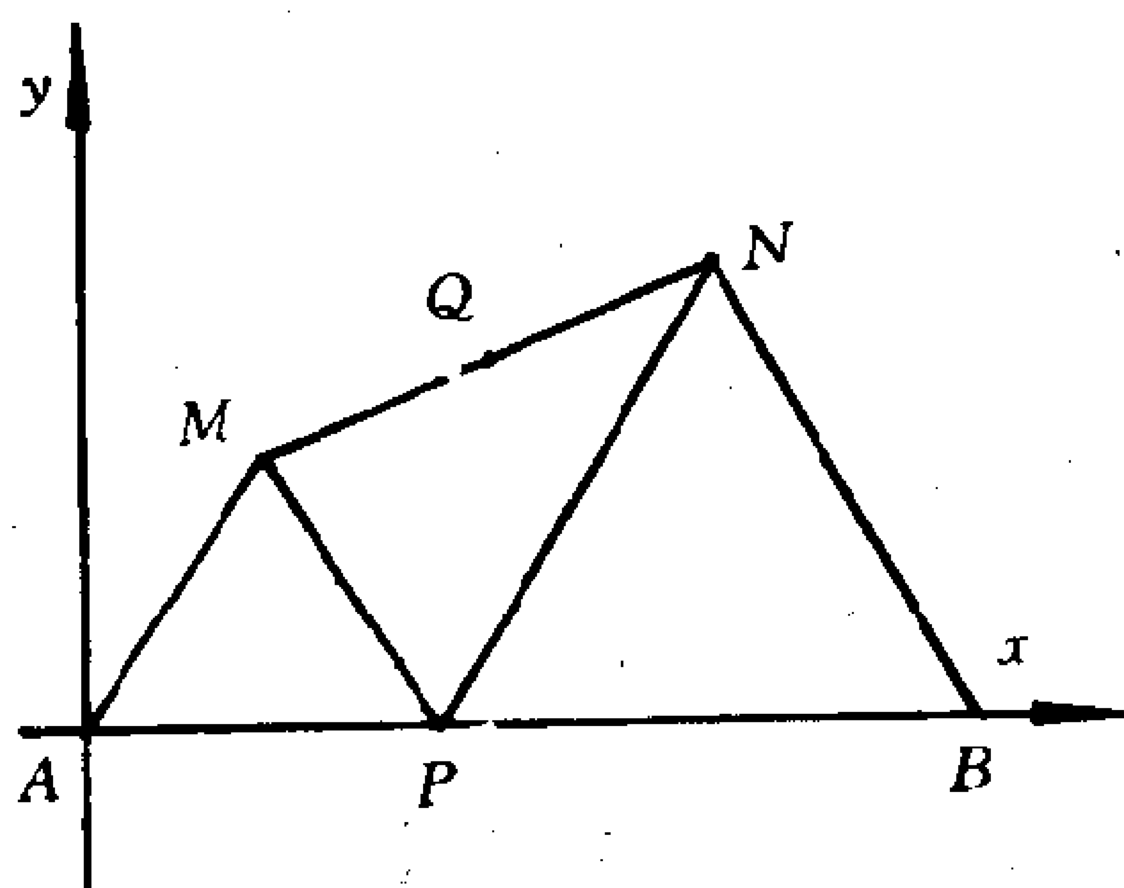


图 2-14

分析 动点 Q 的位置随着动点 P 的位置即随着 AP 的长度而定. 故可选取 AP 的长为参数来表示点 Q 的轨迹.

解 如图 2-14 建立直角坐标系，设 $Q(x,y)$，$AP=t$，则 $A(0,0)$，$B(a,0)$，$P(t,0)$，$M(\frac{t}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}t)$，$N(\frac{a+t}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}(a-t))$$(0<t<a)$.

因为Q是MN的中点，所以$x=\frac{1}{2}(\frac{t}{2}+\frac{a+t}{2})=\frac{a+2t}{4}$，

$y=\frac{1}{2}[\frac{2}{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}(a-t)]=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，又因为$0\neq t\neq a$，所以$\frac{a}{4}<x<\frac{\sqrt{3}}{4}a$，则所求轨迹普通方程为

$$y=\frac{\sqrt{3}}{4}a \quad (\frac{a}{4}<x<\frac{3}{4})$$

故点 Q 的轨迹是一线段（不包括端点），这线段的两个端点为 $(\frac{a}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}a)$，$(\frac{3}{4}a,\frac{\sqrt{3}}{4}a)$.

评注 本题通过线段参数 t 把动点与已知条件联系起来

了. 在这里，已清楚地看出参数的"桥梁"作用. 另外，在解题过程中要特别留意参数的取值范围，如果不注意这一点，本题会误认为点 Q 的轨迹是直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

例 2 过圆内一定点的各弦被该点所分两部分之积是一个定值(常数)(相交弦定理).

证明 选圆心为原点，如图 2—15 建立坐标系，设圆半径为 r，圆的方程为 $x^2+y^2=r^2$，设圆内定点 P_0 的坐标为 (x_0, y_0)，那么，过点 P_0 的弦的参数方程为：

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\theta \\ y=y_0+t\sin\theta \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

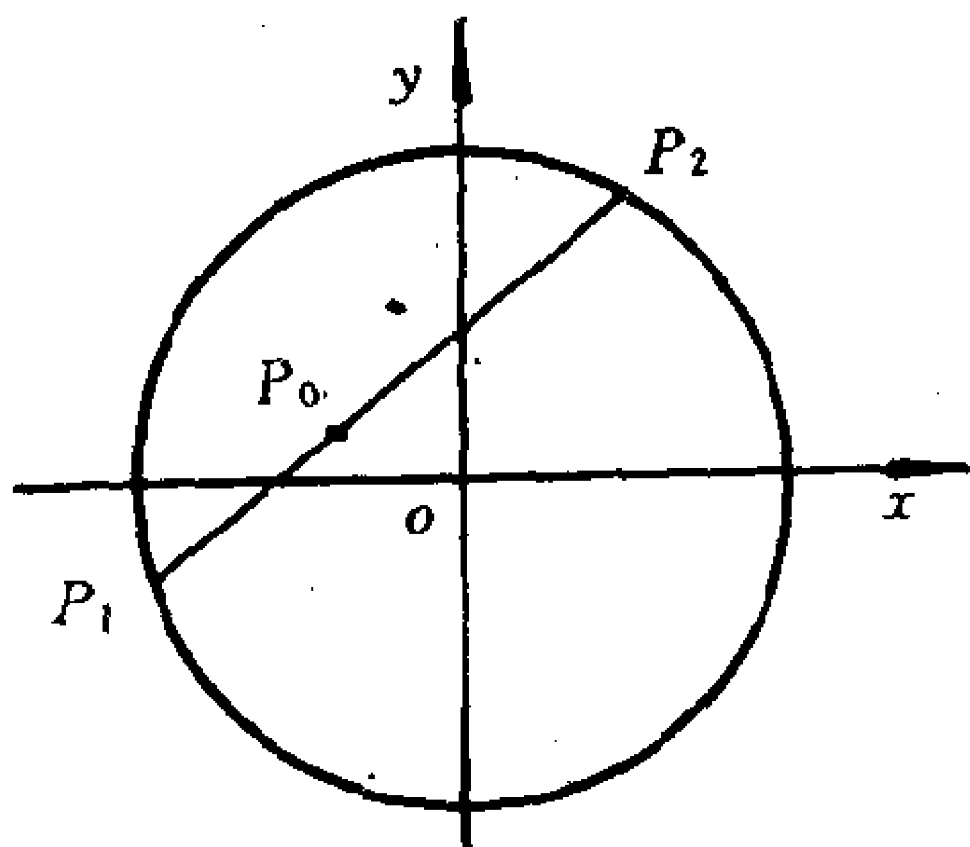


图 2—15

代入圆方程 $x^2+y^2=r^2$，得 t 方程为：$t^2+2(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta)t+x_0^2+y_0^2-r^2=0$，因为 $P(x_0, y_0)$ 是圆内一点，所以 $x_0^2+y_0^2-r^2<0$，所以，上述关于 t 的二次方程的判别式 $\Delta>0$，故方程有两实根，设为 t_1、t_2，那么，弦被定点 $P_0(t_0, y_0)$ 分成两部分的积为：

$$|P_0P_1| \cdot |P_0P_2|=|t_1t_2|=|x_0^2+y_0^2-r^2|=r^2-x_0^2-y_0^2$$

(常数).

评注 同理还可以证明圆的割线定理、切割线定理等等，而且对于二次曲线与直线有关的各种性质，常用直线点斜式参数方程处理之.

2. 比值参数法

比值参数通常指那些被选作参数的比值. 而比值参数法乃指用比值参数去解决数学问题的方法. 请注意直线的两点

式参数方程中的参数就是比值参数.它的几何意义也常常用到.

例3 平行于三角形一边作一直线,截原三角形得一梯形,试求梯形对角线交点的轨迹方程.

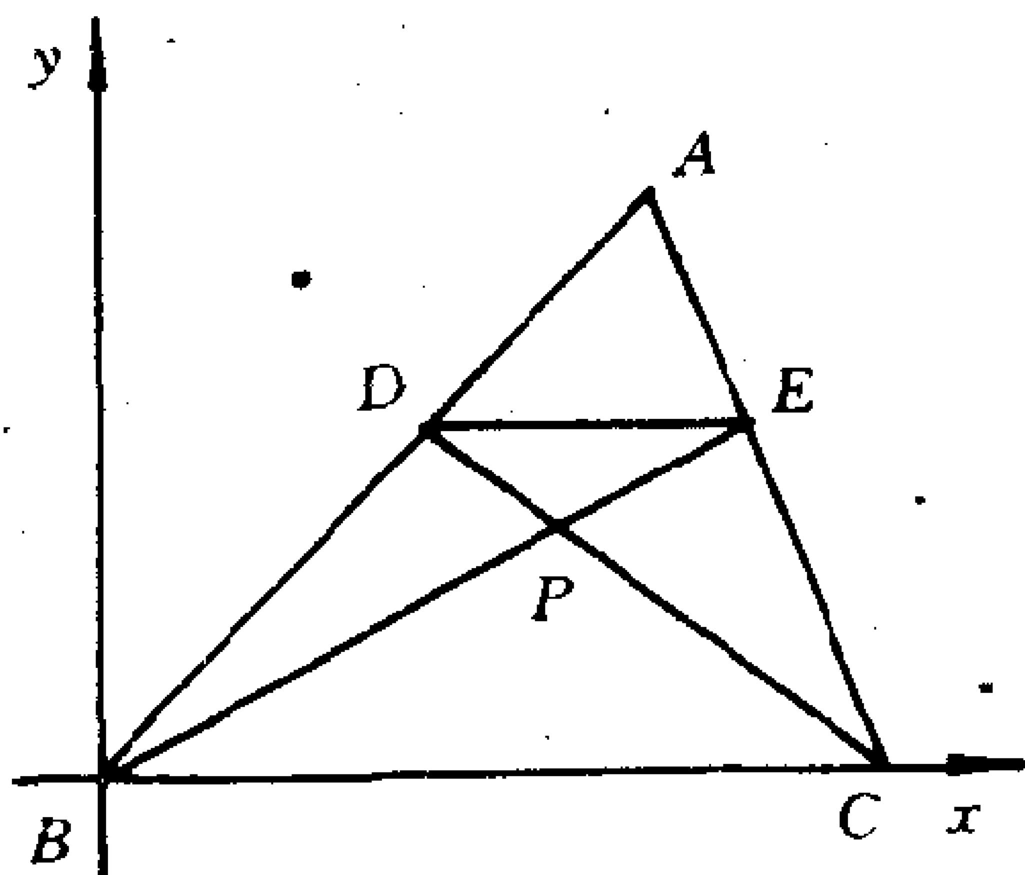


图 2—16

解 如图2—16建立直角坐标系(因为动点P随着动直线DE而定,动直线DE又随着点D而定,而点D可由比值$\dfrac{AD}{DB}$来确定),设$P(x,y)$、$B(0,0)$、$C(a,0)$、$A(b,c)$,令$\dfrac{AD}{DB}=\lambda$ $(\lambda>0)$.因为$DE/\!/BC$,所以$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}=\lambda$,由定比分点公式则有$D(\dfrac{b}{1+\lambda},\dfrac{c}{1+\lambda})$,$E(\dfrac{b+\lambda a}{1+\lambda},\dfrac{c}{1+\lambda})$.

因为B、P、E三点共线,PB的斜率与EB的斜率相等即$k_{PB}=k_{EB}$,则

$$\frac{y}{x}=\frac{c}{1+\lambda}\Big/\frac{b+\lambda a}{1+\lambda}=\frac{c}{b+\lambda a} \qquad (1)$$

又因C、P、D三点共线,同理得

$$\frac{y}{x-a}=\frac{c}{b-a-\lambda a} \qquad (2)$$

由(1)、(2)消去参数λ,化简得

$$2cx-(2b-a)y-ac=0 \qquad (3)$$

因点$A(b,c)$及BC的中点$Q(\dfrac{a}{2},0)$都适合式(3),所以式(3)表示$\triangle ABC$中,BC边上的中线所在的直线方程.故点P的轨迹恰是BC边上的中线AQ(但不包括端点A、Q).

评注 本题方法较多,比如可运用线段参数法来求解,还可用平面几何方法证明点 P 的轨迹是 BC 边上的中线,但上法较简单.

例 4 如图 2—17,过$\triangle ABC$的重心 G 作一直线分别交 AB、AC 于 H、K 两点,求证:

$\frac{BH}{HA}+\frac{CK}{KA}$为定值.

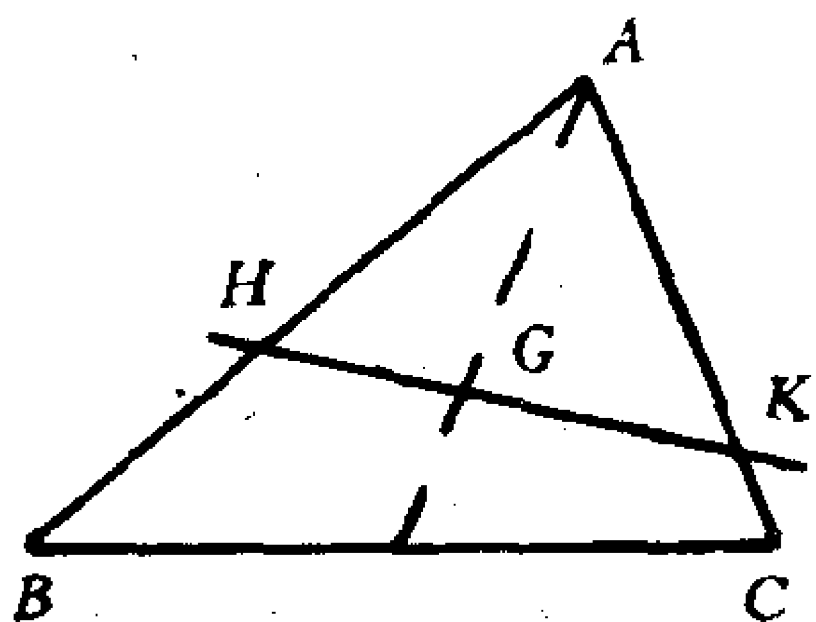


图 2—17

证明 由于涉及直线 BA、CA 上线段之比,故可选用直线的两点式参数方程解之.

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$,则直线 BA 的两点式参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_2+\lambda_1 x_1}{1+\lambda_1} \\ y=\dfrac{y_2+\lambda_1 y_1}{1+\lambda_1} \end{cases} \quad (\lambda_1 \text{ 为参数}, \lambda_1 \neq -1) \qquad (1)$$

直线 CA 的两点式参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_3+\lambda_2 x_1}{1+\lambda_2} \\ y=\dfrac{y_3+\lambda_2 y_1}{1+\lambda_2} \end{cases} \quad (\lambda_2 \text{ 为参数}, \lambda_2 \neq -1) \qquad (2)$$

又设 HK 的方程为 $mx+ny+l=0$

将(1)代入(3),解得

$$\lambda_1=-\frac{mx_2+ny_2+l}{mx_1+ny_1+l} \qquad (3)$$

同理,由(2)、(3)得

$$\frac{CK}{HA}=-\frac{mx_3+ny_3+l}{mx_1+ny_1+l}$$

$$\therefore \frac{BH}{HA}+\frac{CK}{KA}=-\frac{m(x_2+x_3)+n(y_2+y_3)+2l}{mx_1+ny_1+l}$$

又因重心 $G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$ 在直线 HK 上，故

$$m\cdot\frac{x_1+x_2+x_3}{3}+n\cdot\frac{y_1+y_2+y_3}{3}+l=0$$

解得 $m(x_2+x_3)+n(y_2+y_3)+2l=-(mx_1+ny_1+l)$

故有 $\frac{BH}{HA}+\frac{CK}{KA}=-\frac{-(mx_1+ny_1+l)}{mx_1+ny_1+l}=1$

评注 直线的两点式参数方程在解决平面几何中的比例问题是有着独特作用的.

3. 角参数法

角参数通常指被选作参数的角，而角参数法即指用角参数去解决数学问题的方法. 值得注意的是，圆、椭圆、双曲线的参数方程中，常以角为参数，这些参数方程在解题中有着广泛的应用.

例 5 一条长为 2 的线段 AB 的两端点沿抛物线 $y=x^2$ 上移动，试求

(1)线段 AB 的中点 M 的轨迹方程；

(2)轨迹的最低点坐标.

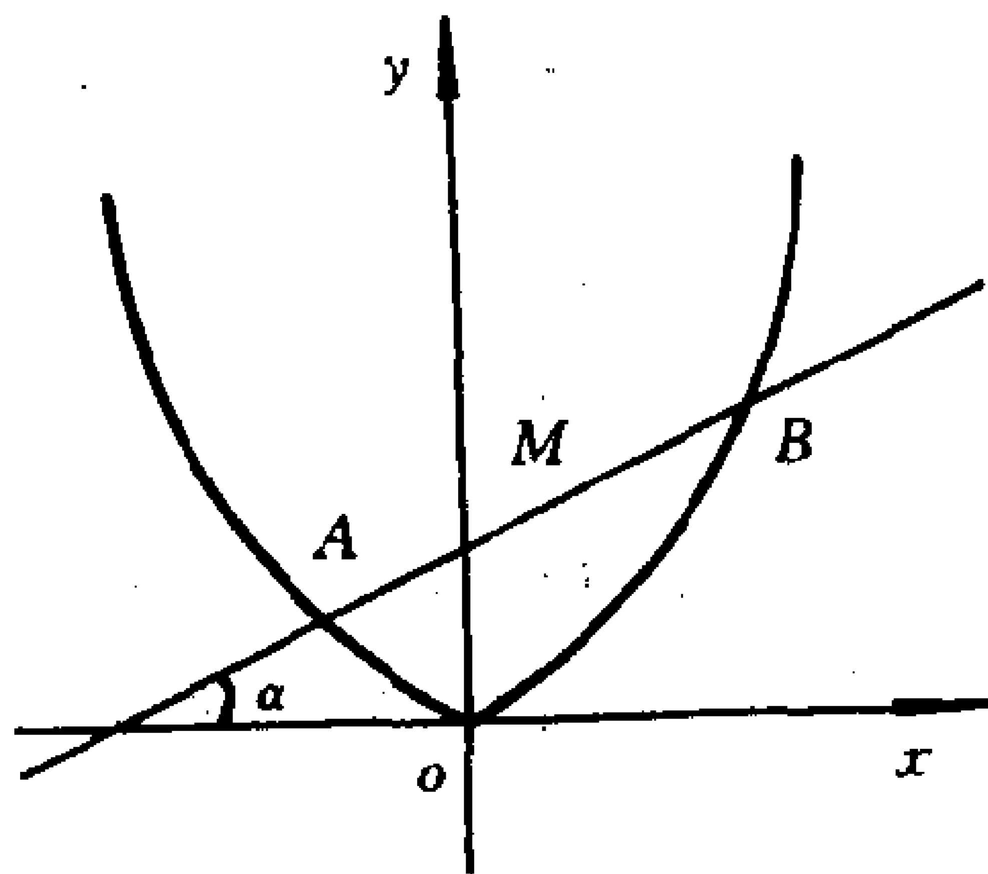


图 2—18

解 (1)如图 2—18，显然可看出动点 M 随 A、B 而定，由于 $|AB|=2$，故如果直线 AB 的倾斜角 α 确定了，那么 A、B 也随之而定，故可选 α 为参数.

设线段 AB 关于 x 轴的倾角为 $\alpha(\alpha\neq\frac{\pi}{2})$，$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，于是

$$x_2 - x_1 = 2\cos\alpha(0 < \alpha < \pi) \tag{1}$$

$$y_2 - y_1 = 2\sin\alpha \tag{2}$$

(1)设 M 的坐标为(x,y)，则

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

因为 A、B 均在抛物线上.

所以 $y_1=x_1^2, y_2=x_2^2$

故有 $x_2^2-x_1^2=y_2-y_1=2\sin\alpha$ (3)

(3)÷(1)得 $x_1+x_2=\text{tg}\alpha$ (4)

故有 $x=\frac{1}{2}\text{tg}\alpha$ (5)

又$(1)^2+(4)^2$ 可得 $x_2^2+x_1^2=2\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\text{tg}^2\alpha$

则 $y_2+y_1=x_2^2+x_1^2=2\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\text{tg}^2\alpha$

所以 $y=\cos^2\alpha+\frac{1}{4}\text{tg}^2\alpha$ (6)

由(5)、(6)两式即得 M 的轨迹的参数方程

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\text{tg}\alpha \\ y=\cos^2\alpha+\frac{1}{4}\text{tg}^2\alpha \end{cases} (\alpha \text{为参数}, 0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi)$$

若消去参数，可得 M 点的轨迹的普通方程

$$y = \frac{1}{1 + 4x^2} + x^2$$

(2)因为 M 的最低点的纵坐标，也就是 $y\cos^2\alpha+\frac{1}{4}\text{tg}^2\alpha$ 的最小值，故只要求出 y 的最小值即可.

$y=\cos^2\alpha+\frac{1}{4}\text{tg}^2\alpha=\cos^2\alpha+\frac{1}{4\cos^2\alpha}-\frac{1}{4}$取最小值，由于 $\cos^2\alpha\cdot\frac{1}{4\cos^2\alpha}=\frac{1}{4}$（常量），故当 $\cos^2\alpha=\frac{1}{4\cos^2\alpha}$. 即 $\cos^4\alpha=\frac{1}{4}$，亦即 $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\cos^2\alpha+\frac{1}{4}\cos^2\alpha$ 取最小值，由此可求得 $y_{min}=\frac{3}{4}$，此时，可得 $x=\pm\frac{1}{2}$. 因此，轨迹的最低点有两个，它们分别为

$$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})与(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})$$

例 6 试证：等轴双曲线上任意一点到两个焦点的距离的积等于这点到双曲线中心距离的平方.

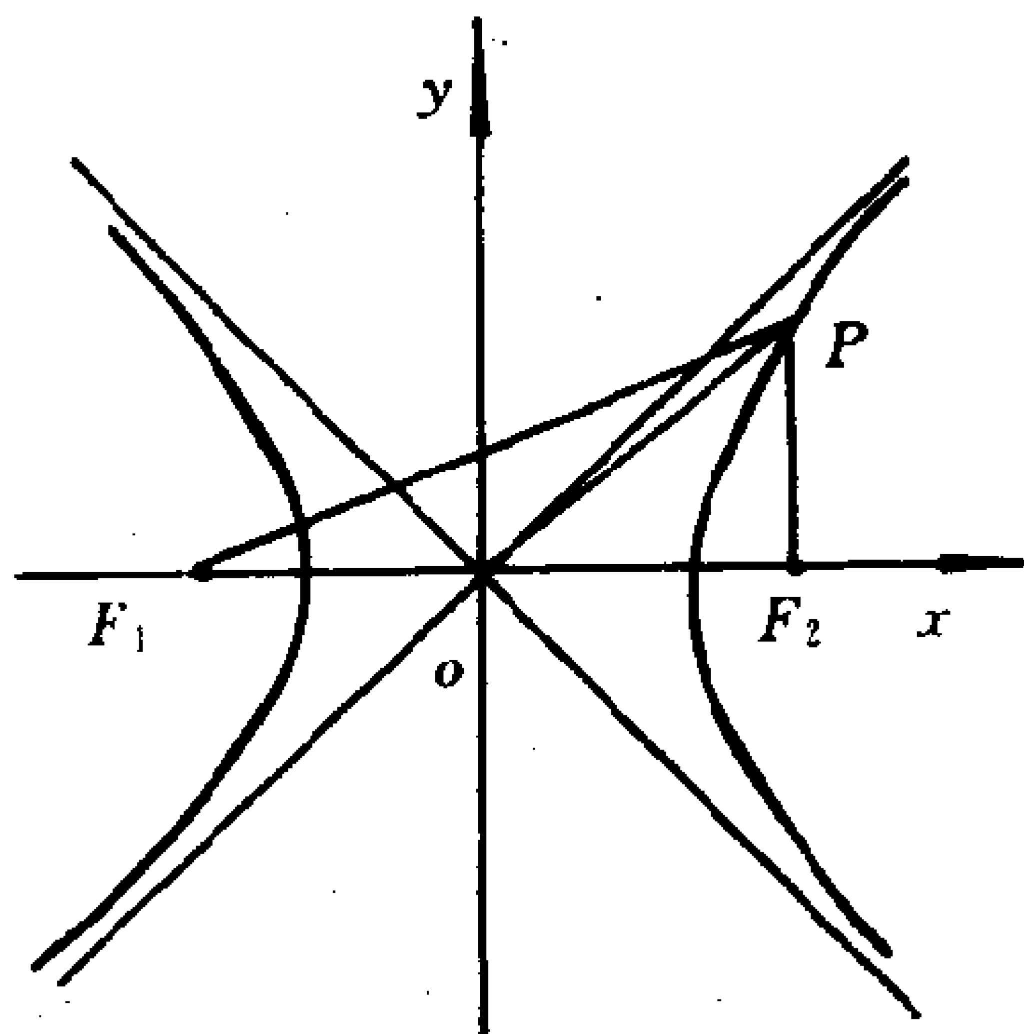


图 2—19

证明 如图 2—19 建立直角坐标系，设等轴双曲线方程为

$x^2-y^2=a^2$，其两焦点为 $F_1(-\sqrt{2}a,0)$、$F_2(\sqrt{2}a,0)$，双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=a\text{tg}\theta\end{cases}(\theta 为参数)$$

设等轴双曲线上任一点 P 的坐标为$(a\sec\theta,a\text{tg}\theta)$，那么，有

$$|oP|^2=a^2(\sec^2\theta+\text{tg}^2\theta)=a^2(2\sec^2\theta-1) \qquad (1)$$

$$|PF_1|=\sqrt{(a\sec\theta+\sqrt{2}a)^2+a^2\text{tg}^2\theta}=a|\sqrt{2}\sec\theta+1|$$

$$|PF_2|=\sqrt{(a\sec\theta-\sqrt{2}a)^2+a^2\text{tg}^2\theta}=a|\sqrt{2}\sec\theta-1|$$

$\because |\sec\theta|\geqslant 1,\sec^2\theta\geqslant 1$

$\therefore 2\sec^2\theta-1>0$

$\therefore |PF_1|\cdot|PF_2|=a^2|\sqrt{2}\sec\theta+1|\cdot|\sqrt{2}\sec\theta-1|=a^2$
$|2\sec^2\theta-1|=a^2(2\sec^2\theta-1)$ (2)

由(1)、(2)可见，$|PF_1|\cdot|PF_2|=|oP|^2$

评注 在有关二次曲线的各种证明问题中，虽然采用它们的普通方程能使问题求得解决，但是对于其中有些证明问题，若采用二次曲线的参数方程来解决，则显得更加简单.

4. 坐标参数法

坐标参数意指选作参数的点的坐标；而坐标参数法即指用坐标参数去解决数学问题的方法. 鉴于参数方程本身就表示动点的坐标是参数的函数，因此，坐标参数法与曲线的参数方程息息相关.

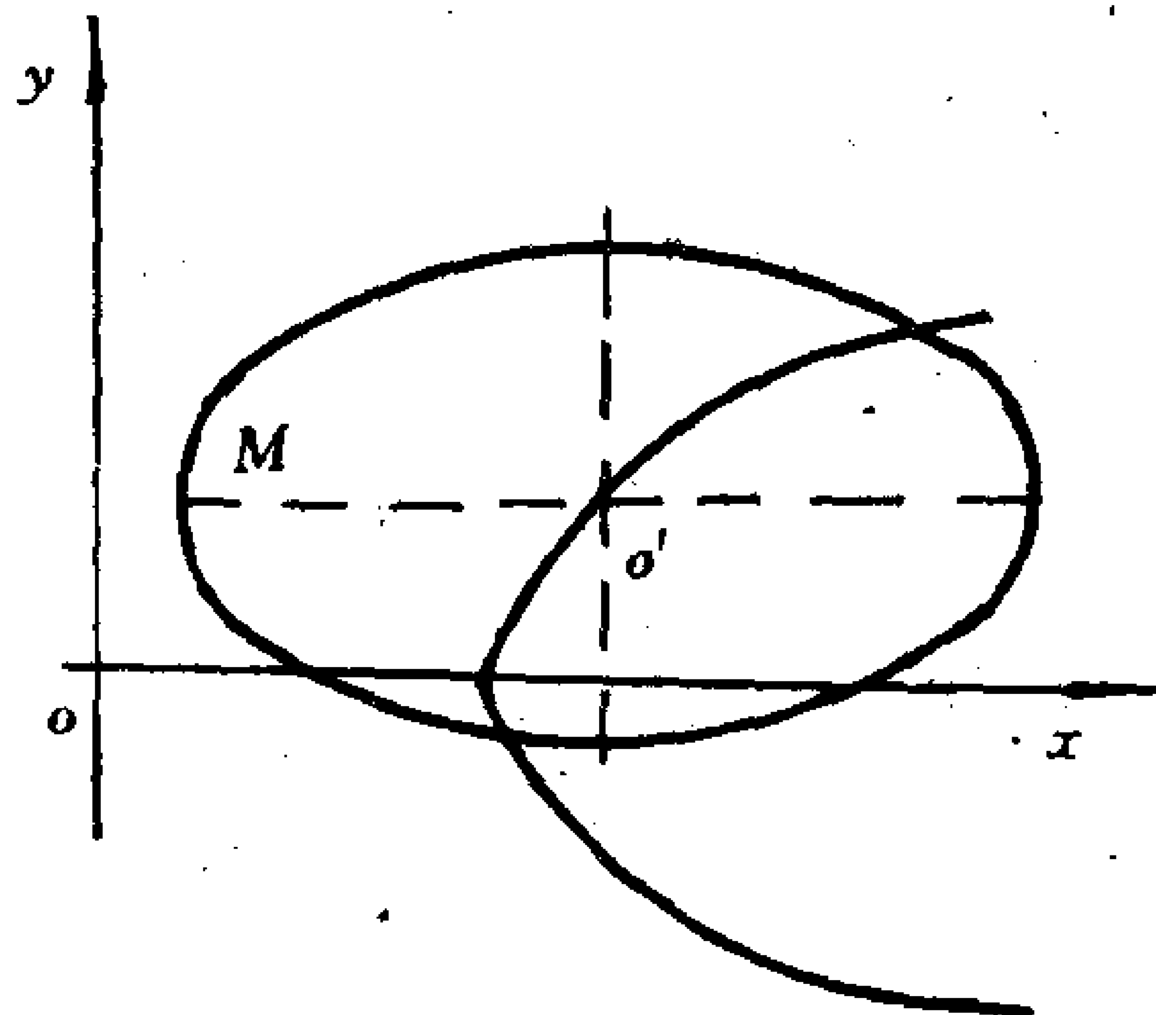


图 2—20

例 7 求长轴为 4，以 y 轴为准线，中心 o' 在抛物线 $y^2=x-3$ 上的椭圆的左顶点 M 的轨迹.

解 如图 2—20，设点 $M(x,y)$，(由于椭圆的长轴为 4，故点 M 随着点 o' 的移动而定，而点 o' 在抛物线 $y^2=x-3$ 上，故可设抛物线参数方程为

$$\begin{cases} x=t^2+3 \\ y=t \end{cases}$$

故可设 $o'(t^2+3,t)$(t 为参数，$t\in R$).

$\because$ 椭圆的长轴为 4，$\therefore |Mo'|=2$

则 $\begin{cases} x=t^2+3-2=t^2+1 \\ y=t \end{cases}$

消去参数 t 得动点 M 的普通方程为

$$y^2=x-1$$

故椭圆的左顶点 M 的轨迹是一条抛物线.

评注 本题出现了一系列中心在抛物线 $y^2=x-3$ 上，且长轴为 4 的椭圆，这些椭圆的短轴是在不断地变化着的. 可以证明，当椭圆中心在抛物线 $y^2=x-3$ 的顶点 $(3,0)$ 时，它的离心率最大，这个最大值是 $\frac{2}{3}$. 事实上，因 $\frac{a^2}{e}=t^2+3$，$e=\frac{4}{t^2+3}$，因 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{t^2+3}$，于是当 $t=0$ 时，离心率有最大值 $\frac{2}{3}$.

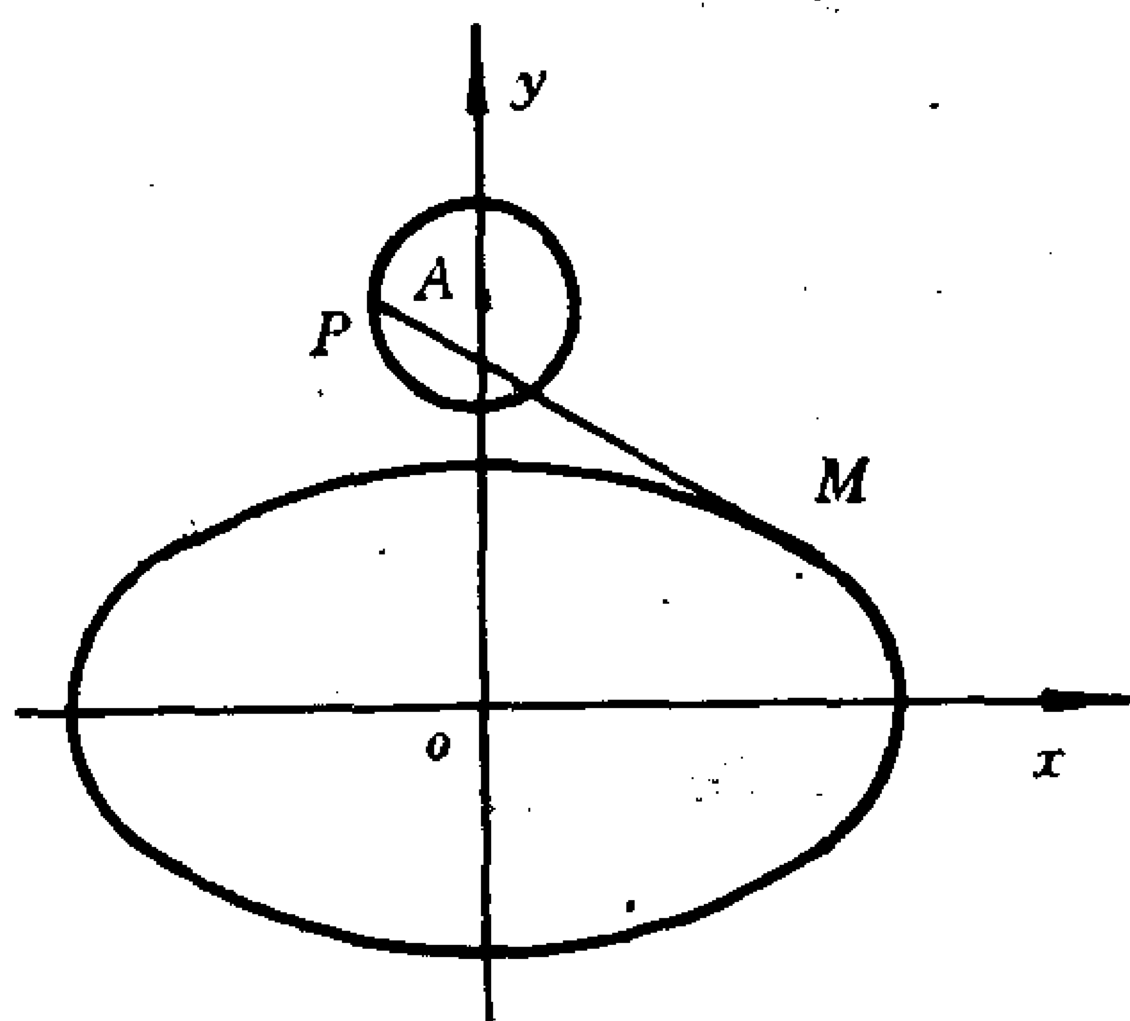


图 2 21

例 8 已知点 P 在圆 $A: x^2+(y-2)^2=\frac{1}{4}$ 上运动，点 M 在椭圆 $o: x^2+4y^2=4$ 上运动，试求 $|PM|$ 的最大值与最小值.

分析 一般思考方法是先写出圆 A 和椭圆 o 的参数方程

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\cos\alpha \\ y=2+\frac{1}{2}\sin\alpha \end{cases}(0\leqslant\alpha<2\pi)\text{和}\begin{cases} x=2\cos\beta \\ y=\sin\beta \end{cases}(0\leqslant\beta<2\pi)$$

进而设 P、M 的坐标为 $P(\frac{1}{2}\cos\alpha, 2+\frac{1}{2}\sin\alpha)$、$M(2\cos\beta, \sin\beta)$，于是有

$$|PM|=\sqrt{(\frac{1}{2}\cos\alpha-2\cos\beta)^2+(2+\frac{1}{2}\sin\alpha-\sin\beta)^2}$$

可此时很难用初等方法求出它的最值. 为此,可先考虑求 $|AM|$ 的最值以减少一个参数来处理.

解 如图 2—21,设 $M(2\cos\theta,\sin\theta)(0\leqslant\theta<2\pi)$

$\because A$ 的坐标为$(0,2)$

$$\therefore |AM|=\sqrt{(2\cos\theta)^2+(2-\sin\theta)^2}$$
$$=\sqrt{4\cos^2\theta+4-4\sin\theta+\sin^2\theta}$$
$$=\sqrt{-3\sin^2\theta-4\sin\theta+8}$$
$$=\sqrt{-3(\sin\theta+\frac{2}{3})^2+\frac{28}{3}}$$

$\because 0\leqslant\theta<\pi \therefore$ 当 $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ 时,$|AM|_{最大}=\sqrt{\frac{28}{3}}$;当 $\sin\theta=1$ 时,$|AM|_{最小}=1$. 由 A 为圆 A 圆心,易知

$$|PM|_{最大}=\frac{1}{2}+|AM|_{最大}=\frac{2\sqrt{21}}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{21}+3}{6},$$

$$|PM|_{最小}=-\frac{1}{2}+|AM|_{最小}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

评注 如果所求的动点 P 的坐标与另外的一个(或几个)动点 Q 有联系,这时就可以 Q 的坐标为参数,不过要注意:以这种点的坐标为参数时,最后必须消去这些参数.

5. 斜率参数法

斜率参数是指可选作参数的直线的斜率;而斜率参数法则是指用斜率参数去解决数学问题的方法. 须注意的是这种方法与直线的点斜式方程和斜截式方程紧密联系.

例 9 如果抛物线 $x^2=4y$ 的切线交双曲线 $xy=2$ 于 A、B 两点,求 AB 的中点 M 的轨迹方程.

解 $\because$点 M 由 A、B 两点确定,A、B 两点随着抛物线的

切线而定，而切线又由它的斜率确定，故可由斜率参数求解.

设抛物线 $x^2=4y$ 的切线方程为 $y=kx+b$，代入 $x^2=4y$，整理得

$$x^2-4kx-4b=0$$

由判别式 $\Delta=0$ 得 $b=-k^2$

∴抛物线的切线方程为 $y=kx-k^2$ (1)

(1)代入双曲线方程 $xy=2$，整理得

$$kx^2+k^2x-2=0 \quad (2)$$

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$M(x,y)$，则 $x_1+x_2=k$.

$$\therefore x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{2}$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{kx_1-k^2+kx_2-k^2}{2}$$

$$=\frac{k(x_1+x_2)-2k^2}{2}=-\frac{k^2}{2}$$

因为切线与双曲线相交，故由(2)得

$$\Delta=(-k^2)^2-4k(-2)>0 \quad 即\ k(k^3+8)>0$$

解这个不等式，得 $k>0$ 或 $k<-2$.

∴点 M 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{k}{2} \\ y=-\dfrac{k^2}{2} \end{cases} (k\ 为参数, k>0\ 或\ k<-2) \quad (3)$$

评注 在求轨迹参数方程时，最容易忽视的是参数的取值范围，因此，在求解过程中，应随时注意限制条件，此题若将式(3)化为普通方程，得 $y=-2x^2$，由 $k>0$ 可得 $x>0$. 由 $k<-2$，可得 $x<-1$. 因此它的图象是当 $x>0$ 或 $x<-1$ 时抛物线的一部分.

例 10 求双曲线 $xy=1$ 的切线，使它被另一条双曲线 $4xy=3$ 截得的线段最短.

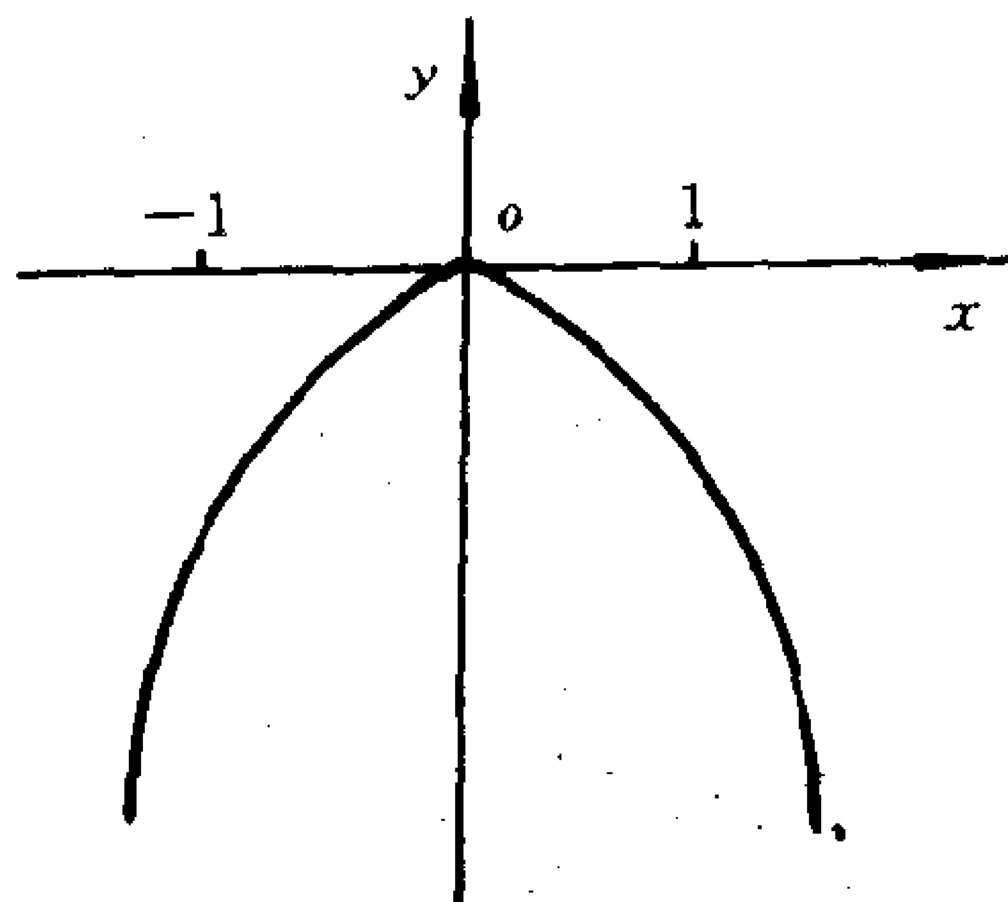


图 2—22

解 设所求切线方程为

$$y = kx + b \qquad (1)$$

将(1)代入 $xy=1$，得 $x(kx+b)=1$，$kx^2+bx-1=0$

由 $\Delta=0$ 得 $b^2+4k=0$，$k=-\dfrac{b^2}{4}$，于是(1)可写成

$$y=-\frac{b^2}{4}x+b \qquad (2)$$

将(2)代入 $4xy=3$，整理得

$$b^2x^2-4bx+3=0 \qquad (3)$$

设(2)与 $4xy=3$ 的交点为 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，则

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，因为 A、B 在切线(2)上，所以，$y_1-y_2=-\dfrac{b^2}{4}x_1+b-(-\dfrac{b^2}{4}x^2+b)=\dfrac{b^2}{4}(x_1-x_2)$，则

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+\frac{b^4}{16}(x_1-x_2)^2}$$

又∵ x_1、x_2 是方程(3)的两个根，∴ $x_1+x_2=\dfrac{4}{b}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{3}{b^2}$.

则 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\dfrac{16}{b^2}-\dfrac{12}{b^2}=\dfrac{4}{b^2}$

∵ $|AB|=\sqrt{\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{4}{b^2}}\geqslant 2$，即当 $b=\pm 2$ 时，切线(2)被双曲线 $4xy=3$ 截得线段长为最短. 故所求切线方程为

$$y=-x+2 \text{ 和 } y=-x-2$$

评注 利用动直线的斜率为参数是求轨迹的常用方法之一，前面二例的解法中可看到，当动点在某一有规律运动的直线上时，选用该直线斜率作参数可使问题解得较为方便.

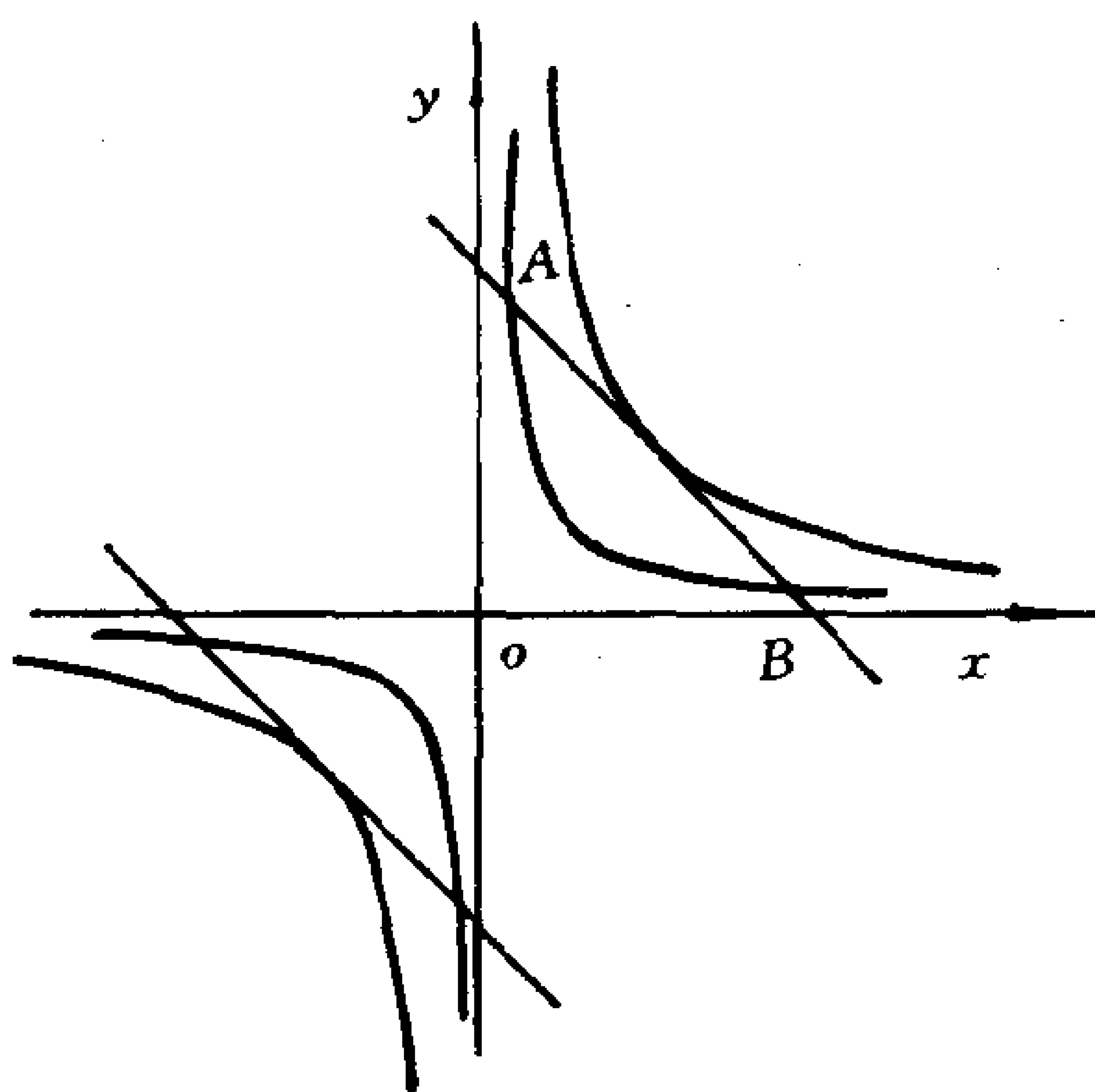


图 2-23

6. 时间参数法

时间参数是指被选作参数的是时间 t，时间参数法则指用时间参数去解决数学问题的方法. 由于这种参数具有明显的物理意义，在一些与运动速度有关的问题，时间是一个起关键作用的因素，选取时间为参数，常可使问题得以解决. 例如曾在§2.1的例 4 中采用过此法. 以下再举一例.

例 11 已知射线 l 以角速度 ω 绕其端点 o 旋转，同时点 P 以角速度 2ω 绕 l 上某点 C 作半径为 r 的圆周运动. 设 $|oC|=R$，射线 l 及点 P 都按逆时针方向旋转，试求点 P 的轨迹方程.

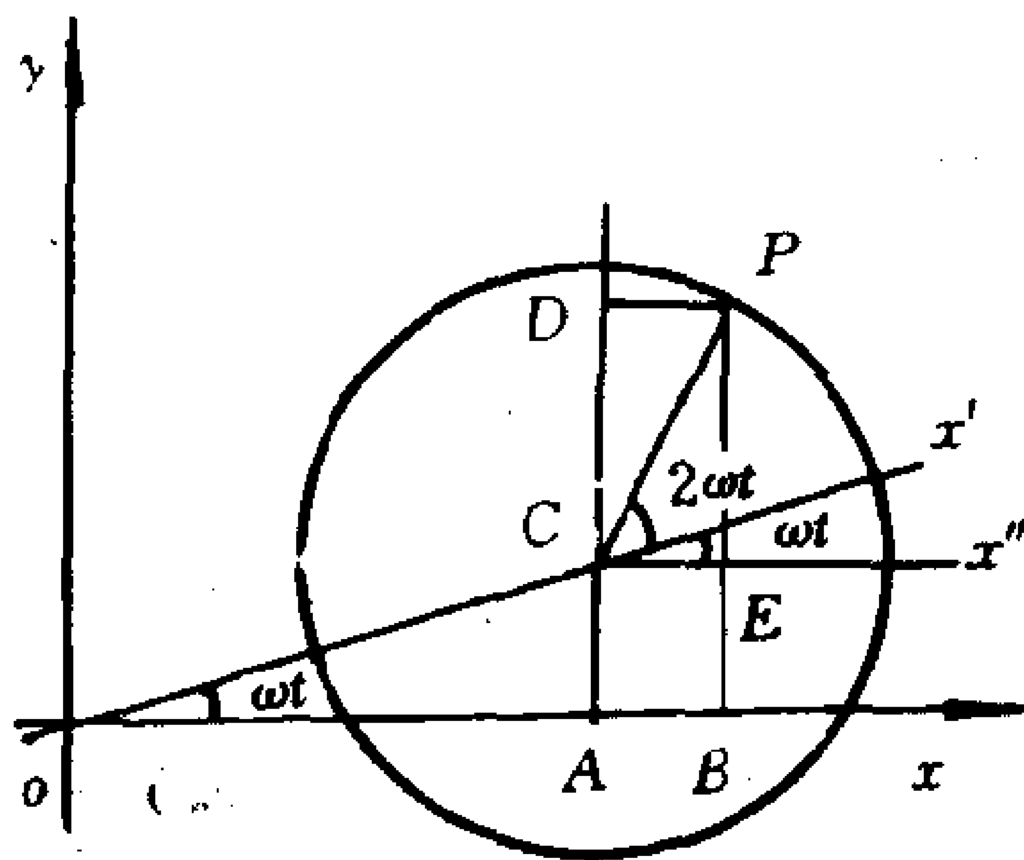


图 2-24

解 以 o 为原点，以射线 l 的初始位置为 x 轴建立坐标系（如图 2—24），图中 ox' 是经过时间 t 后射线 l 所转到的位置，$P(x,y)$ 为轨迹上任一点. A、B 分别为 C、P 两点在 x 轴上

的射影，Cx''是过 C 点与 ox 轴同向平行的射线，D、E 分别是 P 点在直线 AC 与 Cx''上的射影，因为 l 与点 P 都按逆时针方向旋转，经过时间 t，有$\angle xox'=\omega t$，$\angle x'CP=2\omega t$

$\therefore \angle x''CP=\omega t+2\omega t=3\omega t$　于是

$$x=oB=oA+AB=oA+CE=|oC|\cos\omega t+|CP|\cos 3\omega t$$
$$=R\cos\omega t+r\cos 3\omega t.$$

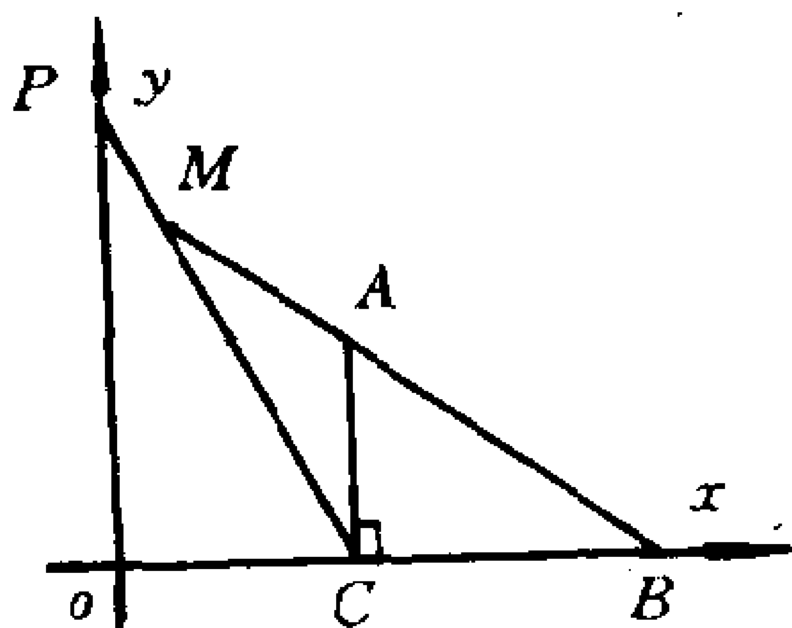
$$y=BP=AD=AC+CD=|OC|\sin\omega t+|CP|\sin 3\omega t$$
$$=R\sin\omega t+r\sin K 3\omega t.$$

故 P 点轨迹的参数方程是

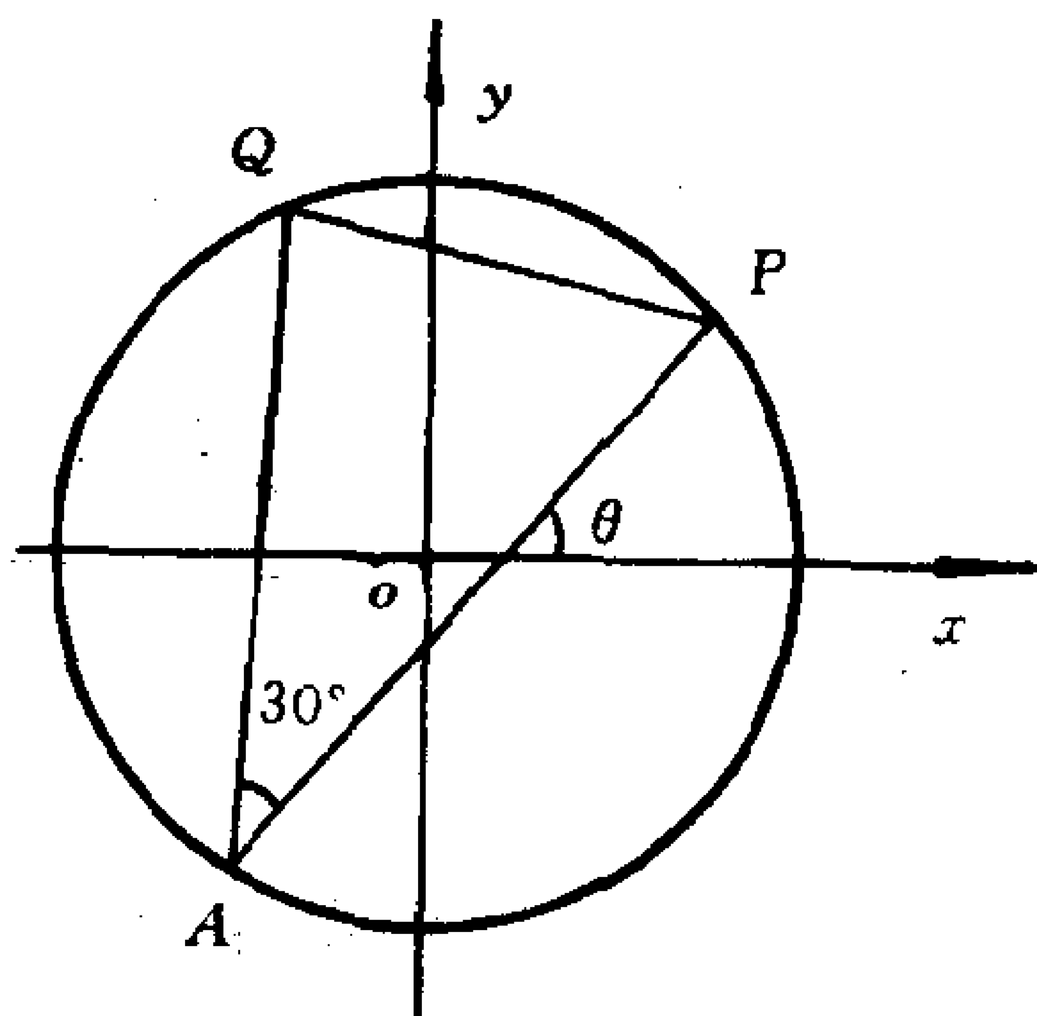
$$\begin{cases} x=r\cos\omega t+r\cos 3\omega t \\ y=R\sin\omega t+r\sin 3\omega t \end{cases}(t\text{ 为参数})$$

习　题　2.3

1. 一条直线 PQ 从与 y 轴重合的位置绕定点 $P(0,6)$按逆时针方向转动，转动时推动Rt$\triangle ABC$的直角边CB沿ox轴滑动（如图），若$|AC|=3$，$|BC|=4$，求直线 PQ 与直线 BA 的交点 M 的轨迹.



第 1 题图



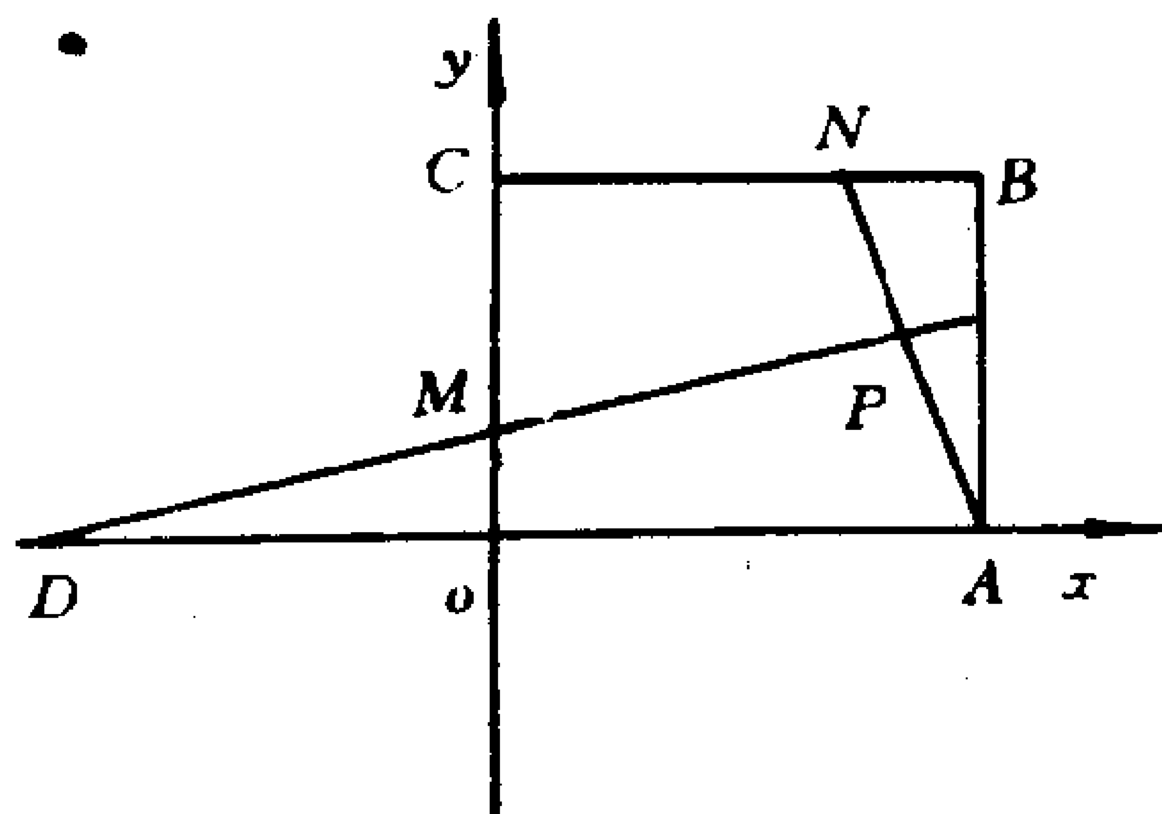
第 2 题图

2. 已知圆 $x^2+y^2=4$，A、P、Q 为圆上三点（如图），且 $A(-1,-\sqrt{3})$，$\angle QAP=30°$，若 AP 的倾斜角为 θ，试问 θ 为何值

时，$\triangle APQ$ 的面积为最大，并求出这个最大值.

3. 过点 $M(2,1)$ 作椭圆 $C:\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{4}=1$ 的弦，使 M 是弦的三等分点，求此弦所在的直线方程.

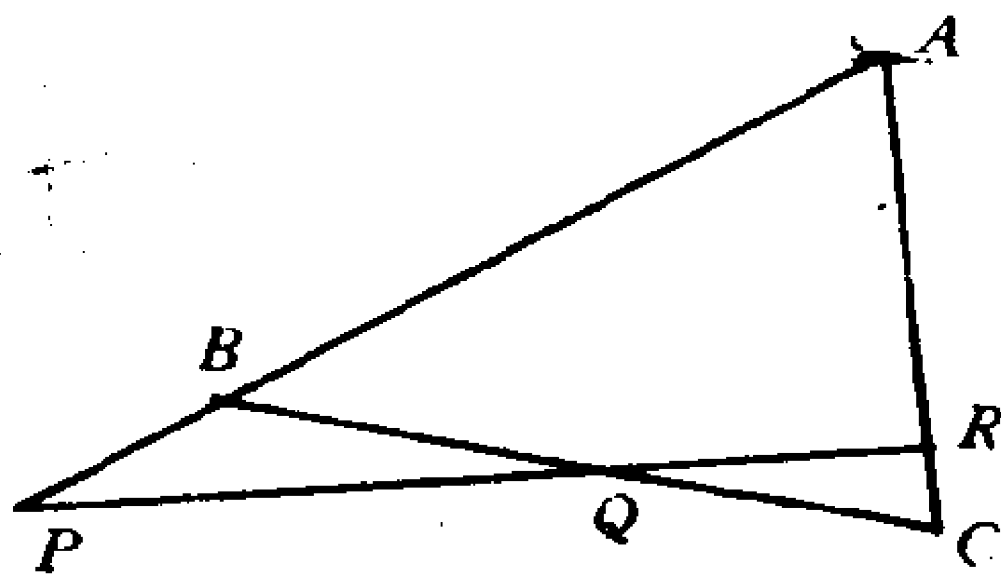
4. 如图，在直角坐标系中，已知矩形 $oABC$ 的边长 $|oA|=a$，$|oC|=b$，点 D 在 Ao 的延长线上，$|Do|=a$. 设 M、N 分别是 oC、BC 边上的动点，且 $oM:MC=BN:NC\neq0$，求直线 DM 与 AN 的交点 PA 的轨迹方程.



第 4 题图

5. 如图，若直线 PQ 与 ABC 的各边 AB、BC、CA 或其延长线相交于 P、Q、R，则

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=-1$$



第 5 题图

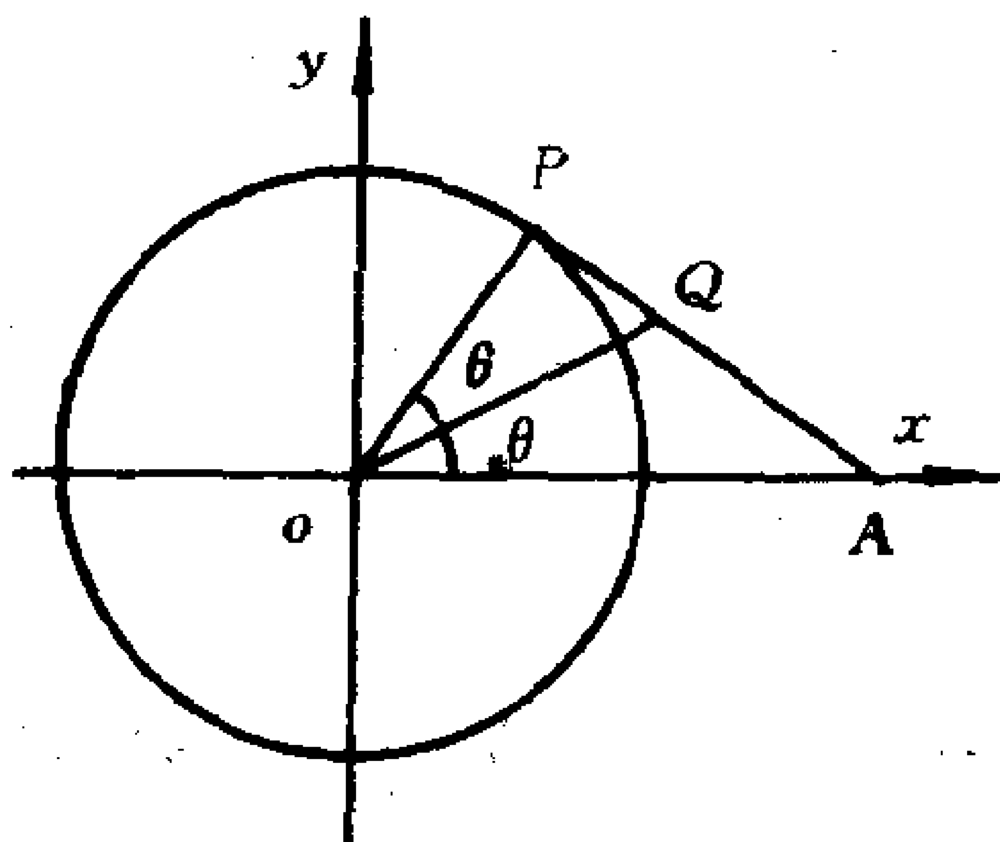
6. 求下列函数的最值：

(1) $y=2\sqrt{2-x}-3\sqrt{5-x}$，

(2) $y=2\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}$，

(3) $y=3\sqrt{5+x}+2\sqrt{4-x}$

7. 如图，圆 $x^2+y^2=1$ 外有定点 $A(a,0)(a>1)$，圆上有动点 P，在$\triangle oAP$ 中，$\angle AoP$ 的平分线和边 AP 交于点 Q，求动点 Q 的轨迹方程.



第 7 题图

8. 设椭圆 C 的中心是坐标原点，长轴在 x 轴上，离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，已知点 $P(0,\frac{3}{2})$到这个椭圆上的点的最远距离是 $\sqrt{7}$. 求这个椭圆 C 的方程，并求椭圆上到点 P 的距离等于 $\sqrt{7}$ 的点的坐标.

9. 一个三角形的底边固定，高也一定，求它的垂心的轨迹方程.

10. 正方形 $ABCD$ 在直角坐标平面内，已知其一条边 AB 在直线 $y=x+4$ 上，顶点 C、D 在抛物线 $x=y^2$ 上，求正方形 $ABCD$ 的面积.

11. 设过原点的直线与圆 $C:x^2+y^2+2ay+a^2-b^2=0$ 的一切线垂直，试求其交点的轨迹.

12. 一条直线经过点 $P(2,3)$，且和两条直线 $l_1:3x+4y+8=0$，$l_2:3x+4y-7=0$ 分别相交于 A、B 两点，若 $|AB|=3\sqrt{2}$，试求这条直线的方程.

13. 某飞机的飞行高度是 600 米，作水平飞行时的速度

150m/s，此时投出的物资，准确地落到了指定地点. 试问飞机在离指定地点多远（指水平距离）处开始投出物资？（取 $g=10\text{m/s}$）

14. k 取何值时，直线 $y-1=k(x-1)$ 能垂直平分抛物线 $y^2=x$ 的某一弦.

15. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点引双曲线的切线，则两焦点到这切线的距离积为定值.

§2.4 参数方程图形的描绘

前面已对由曲线求其参数方程及其应用作了一些介绍，以下将讨论如何从参数方程作出相应的曲线（图形）.

一、参数方程作图法与讨论

普通方程的基本作图法是描点法，即取一系列 x 的值，再通过 $y=f(x)$ 求出相应的 y 值，由 (x,y) 在直角坐标系内定出对应的点，然后用光滑的曲线连结起来即可. 因此参数方程的基本作图法是在参数 t 的允许值范围内取一系列数值，代入参数方程，求出一系列对应的 x、y 值，再按普通方程作图即可. 这种方法的缺陷是：取点盲目，且取点数目多，运算量大，繁琐. 而且还不知所画的曲线是否全面地反映了方程所代表的曲线的主要特征.

为了克服这一缺点，就要在讨论参数方程以前事先弄清曲线的特别性质. 现仿照讨论普通方程的方法来进行讨论，但不像普通方程那样讨论起来容易.

讨论的一般步骤如下：

设曲线 C：$\begin{cases} x=\Phi(t) \\ y=\Psi(t) \end{cases}$ $(a\leqslant t\leqslant b)$

(1)截距

令 $\Phi(t)=0$,解得 $t=t_i(i=1,2,\cdots,m)$,则 $\Psi(t_i)$即为曲线在 x 轴上截距. 同理令 $\Psi(t)=0$,解得 $t=t_j(j=1,2,\cdots,n)$,则 $\Phi(t_j)$即为曲线在 x 轴上的截距.

(2)对称性

对任意 $t(a\leqslant t\leqslant b)$,如果存在一个 $t'\in[a,b]$,使得

(i)若 $\Phi(t')=\Phi(t)$,$\Psi(t')=-\Psi(t)$同时成立,则曲线 C 关于 x 轴对称;

(ii)若 $\Phi(t')=-\Phi(t)$,$\Psi(t')=\Psi(t)$同时成立,则曲线 C 关于 y 轴对称;

(iii)若 $\Phi(t')=-\Phi(t)$,$\Psi(t')=-\Psi(t)$同时成立,则曲线 C 关于原点对称;

(iv)若 $\Phi(t')=\Psi(t)$,$\Psi(t')=\Phi(t)$同时成立,则曲线 C 关于直线 $y=x$ 对称;

(v)若 $\Phi(t')=-\Psi(t)$,$\Psi(t')=-\Phi(t)$同时成立,则曲线 C 关于直线 $y=-x$ 对称;

为了得到 $t'=\lambda(t)$,可先从一个方程,例如 $\Psi(t')=-\Psi(t)$ 解出 $t'=\lambda_1(t)$、$\lambda_2(t)$、…如果能使 $\Phi(t')=\Phi(t)$,则曲线关于 x 轴对称.

(3)范围

在$a\leqslant t\leqslant b$范围内,如果$|\Phi(t)|\leqslant M$,则曲线在直线$x=\pm M$ 之间,否则可向左或向右无限伸展;如果$|\Psi(t)|\leqslant N$,则曲线在 $y=\pm N$ 之间,否则可向上或向下无限伸展.

二、常用方法

参数方程的作图一般方法:

(1)讨论参数方程对应曲线的一般性质(按上法);

(2)列表求 x、y 的对应值;

(3)在直角坐标系上作出相应的点，描点连线即可！

以下举例说明.

例 1 描绘参数方程

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t^2 \\ y=\dfrac{1}{4}t^3 \end{cases} \quad (-\infty<t<+\infty)$$

所表示的曲线.

解 (1)讨论：(Ⅰ)截距：当 $t=0$ 时，对应的 x 和 y 都为 0，曲线过原点；

(i)对称性：令 $\frac{1}{4}t'^3=-\frac{1}{4}t^3$，得 $t'=-t$，代入 $x=\frac{1}{2}t'^2$，而 $\frac{1}{2}(-t)^2=\frac{1}{2}t^2$，故曲线对称于 x 轴；

(ii)范围：由于 $x=\frac{1}{2}t^2$，可知 $x\geqslant 0$. 所以曲线在 y 轴的右方. 又 $y=\frac{1}{4}t^3$ 的 $y\in(-\infty,\infty)$，可知曲线向上向下无限伸展.

(2)列表求 x、y 的对应值

(3)描点作图(如图 2—25).

t	x	y
−3	4.5	−6.75
−2	2	−2
−1	0.5	−0.25
0	0	0
1	0.5	0.25
2	2	2
3	4.5	6.25

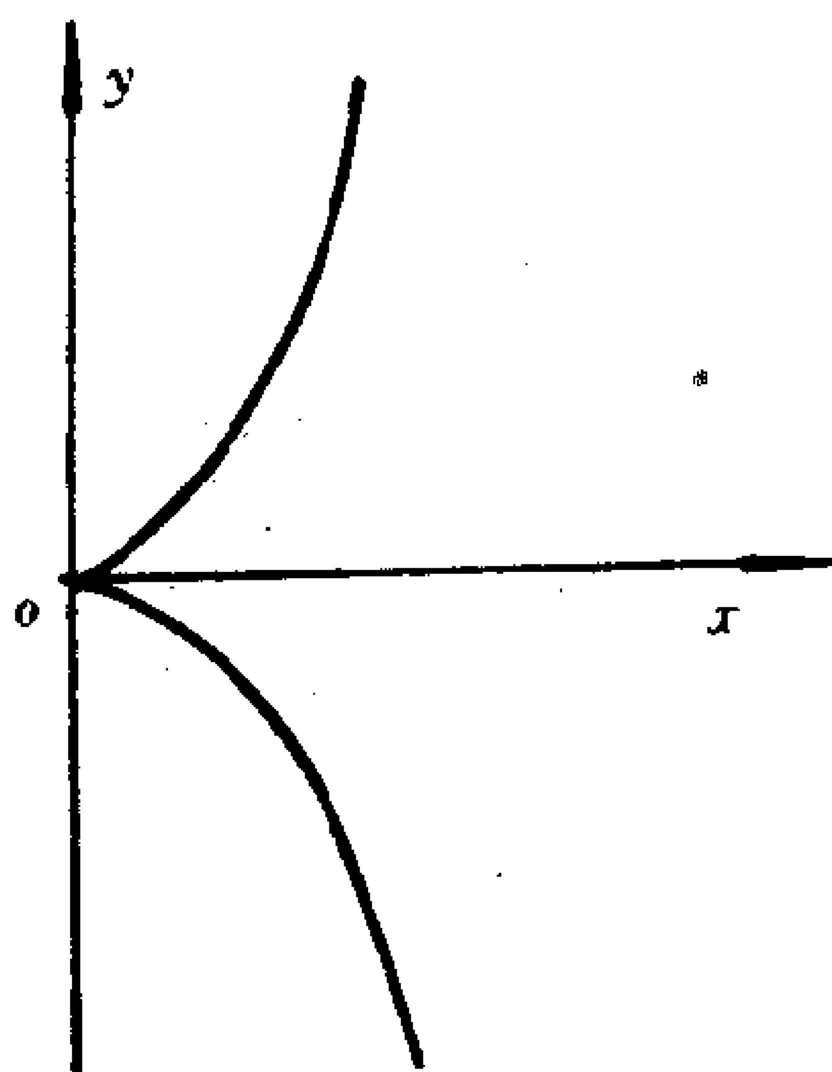


图 2—25

(4)备注：这条曲线叫做半立方抛物线，它的普通方程为 $x^3-2y^2=0$

另外，某些普通方程所表示的曲线不易直接描绘，但在引进参数化为参数方程后，作图就比较容易.

例 2 描绘方程 $y^2(2a-x)=x^3(a>0)$ 所表示的曲线.

解 令 $y=tx$，则 $x^2[(1+t^2)x-2at]=0$ 于是得参数方程

$$\begin{cases} x=\dfrac{2at^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2at^3}{1+t^2} \end{cases} (-\infty<t<+\infty)$$

(1)讨论：(Ⅰ)截距：令 $t=0$ 时，对应的 x、y 都为 0，曲线经过原点.

(i)对称性：令 $\Phi(t')=\Phi(t)$，即 $\dfrac{2at'^3}{1+t'^2}=-\dfrac{2at^3}{1+t^2}$，由于分母是 t^2 的式子，分子是三次式，可见当 $t'=-t$ 时，$\Psi(t')=-\Psi(t)$. 而以 $t'=-t$，代入 $x=\dfrac{2at'^2}{1+t'^2}$ 得 $\dfrac{2a(-t)^2}{1+(-t)^2}=\dfrac{2at^2}{1+t^2}$，所以曲线关于 x 轴对称.

(ii)范围：由于 $x=\dfrac{2at^2}{1+t^2}$，可知 $x\geqslant0$，曲线在 y 轴的右方. 又 $x=\dfrac{2at^2}{1+t^2}=\dfrac{2a}{\dfrac{1}{t^2}+1}$. 当 t 无限增大时，$x\to2a$，而 $|y|$ 却无限增大，可见曲线以 $x=2a$ 为渐近线，曲线向上下无限伸展.

(2)列表计 x 算和 y 的对应值：

(3)描点作图(如图 2—26).

(4)备注：该曲线叫做蔓叶线，它是公元前 200 年，希腊数学家狄阿可尔为了解答平面几何中三个作图不可能问题之一即倍立方问题时而发现的.

t	x	y
0	0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$0.4a$	$\pm 0.2a$
± 1	a	$\pm a$
± 2	$1.6a$	$\pm 3.2a$
± 3	$1.8a$	$\pm 5.4a$
± 7	$1.9a$	$\pm 13.7a$

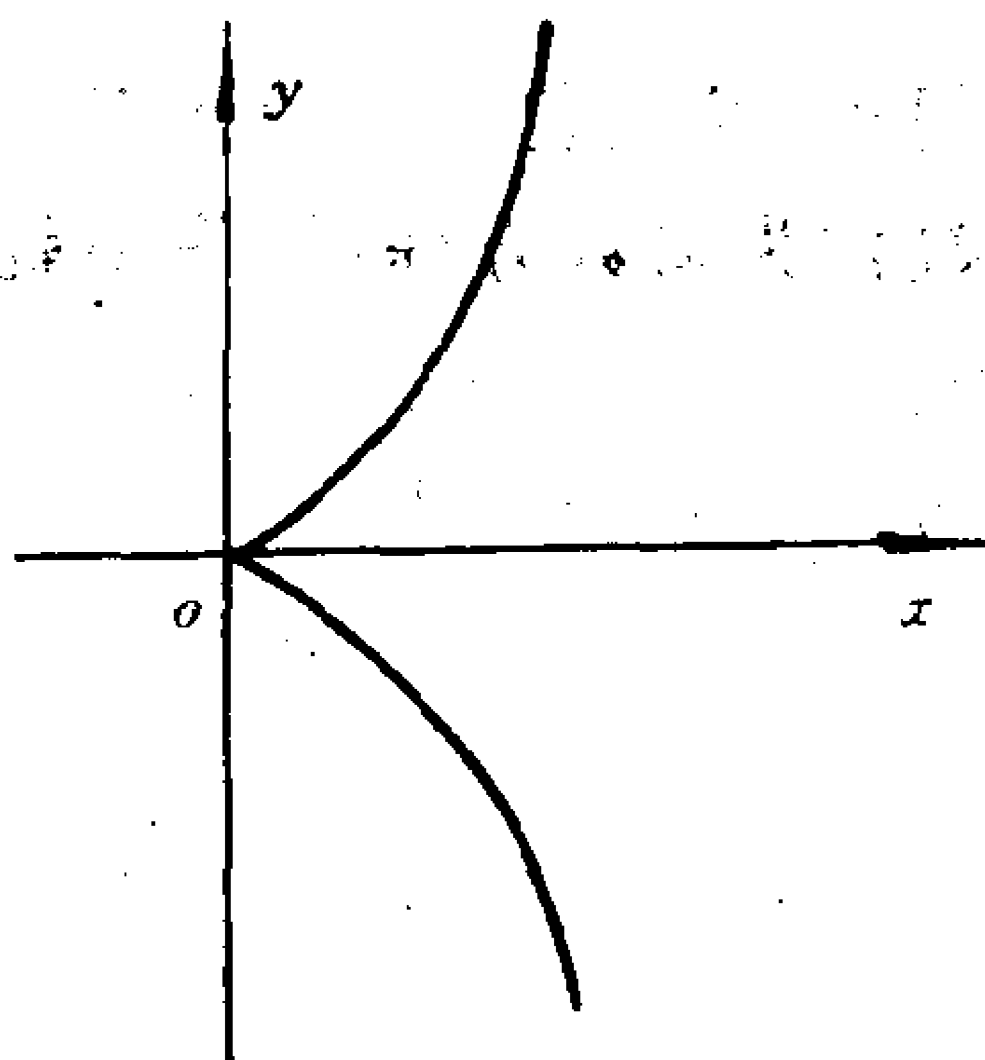


图 2—26

例 3 描绘方程 $x^3+y^3-3axy=0(a>0)$ 所表示的曲线.

解 令 $y=tx$,则 $x^3+t^3x^3-3atx^2=0$

得 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^3}\\y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\end{cases}(-\infty<t<+\infty,t\neq-1)$

由于后一式中当 $t=0$ 时,$x=y=0$,所以后式为曲线的参数方程.

(1)讨论:可以按照例 1、例 2 的方法进行讨论,这里我们换一种方法,即同时从普通方程以及它的参数方程两方面,并互相结合来讨论曲线的性质.

(i)截距:当 $t=0$ 时,对应的 x、y 值都是 0,曲线过原点;

(ii)对称性:在普通方程中,将 x 与 y 互换,方程不变,可知曲线对称于直线 $x-y=0$

(iii)范围:

当 $-\infty<t<-1$ 时,$x>0$,$y<0$,曲线在第 4 象限内;

当 $-1<t\leqslant 0$ 时,$x<0$,$y>0$,曲线在第 2 象限内;

当 $0<t<\infty$ 时，$x>0$，$y>0$，曲线在第 1 象限内；

(Ⅳ)渐近线

为了探求曲线是不是有渐近线，现设这条渐近线的方程为 $y=kx+b$，把它代入原方程，得

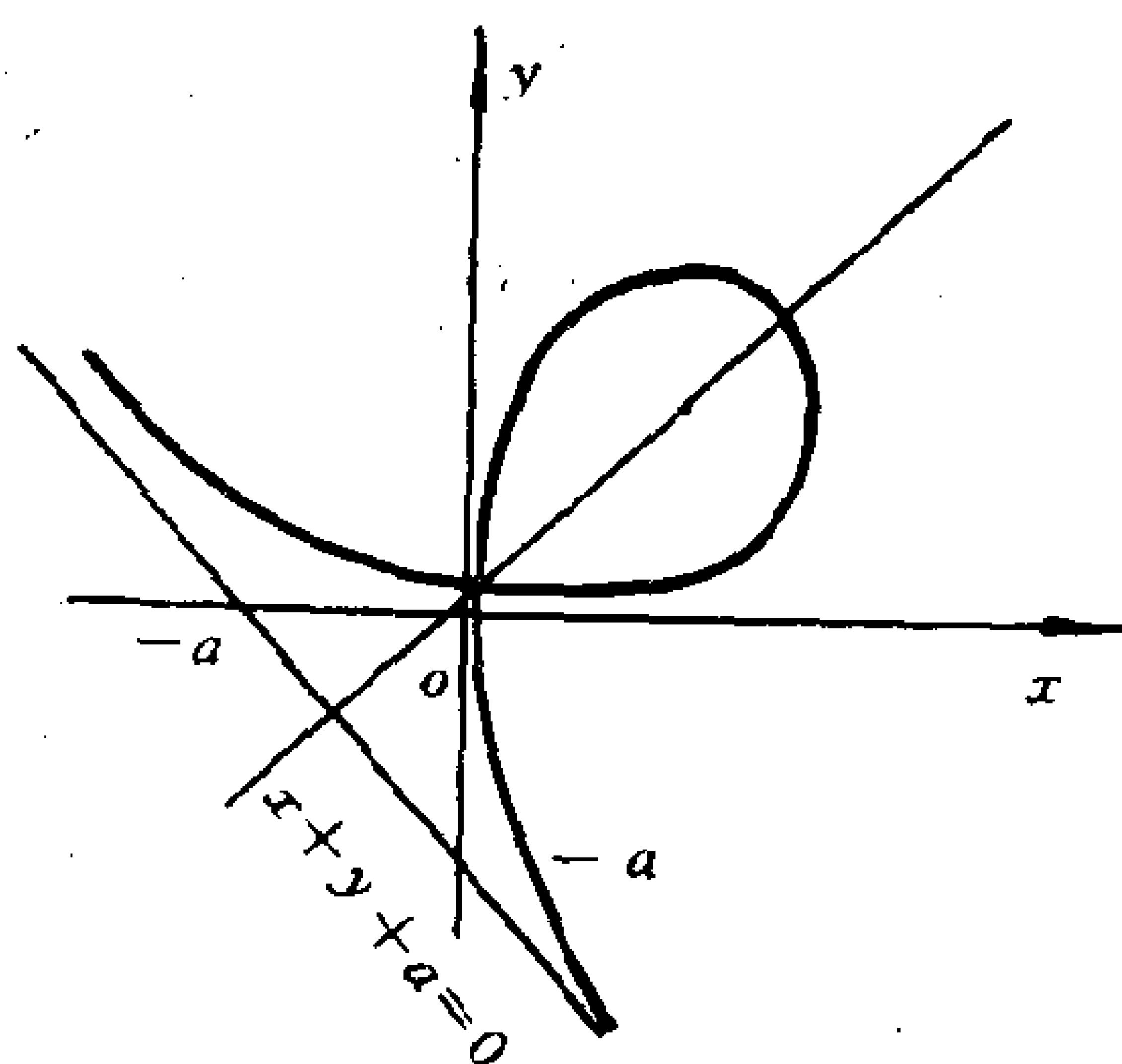


图 2-27

$$x^3+(kx+b)^3-3a(kx+b)x=0$$

即 $(1+k^3)x^3+(3k^2b-3ak)x^2+(3kb^2-3ab)x+b^3=0$

如果所设直线是渐近线，那么它和曲线的两个交点在无穷远处，即这个方程应有两个根趋向无穷大，所以，

$i+k^3=0$ 和 $3k^2b-3ak=0$

$\therefore k=-1, b=-a$

于是直线方程变为 $y=-x-a$ 即 $x+y+a=0$，这是曲线的渐近线.

(2)列表计算 x 和 y 的对应值：

t	-5	-3	-2	-1	0	1
x	$0.12a$	$0.35a$	$0.86a$	$-\infty$	0	$1.5a$
y	$-0.6a$	$-1.04a$	$-1.71a$	∞	0	$1.5a$

t	$\frac{1}{2}$	2	3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$
x	$1.33a$	$0.67a$	$0.332a$	$-1.71a$	$-2.84a$
y	$0.67a$	$1.33a$	$0.96a$	$0.86a$	$1.89a$

(3)描点作图(如图 2 27).

(4)备注:该曲线叫做柳叶线或笛卡儿叶形线.

习　题　2.4

1. 描绘下列参数方程的图象(t 为参数)

(1) $\begin{cases} x=t^6 \\ y=t^4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=2t-t^3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x=2a\cos\theta+a\cos 2\theta \\ y=2a\sin\theta-a\sin 2\theta \end{cases}$

2. 作出方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的曲线.

3. 描绘环索线

$\begin{cases} x=a\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \\ y=at\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}$ $(a>0)$的图形.

第 3 章　极坐标方法

直角坐标方法是常用的一种坐标方法，但并不是用数来描写点的位置的唯一方法．在解决某些问题时，使用极坐标系比使用直角坐标系更显得方便和自然，因此，极坐标方法在解题中被广泛应用．本章将在揭示直角坐标与极坐标两者异同的基础上着重展示极坐标方法及其应用技巧.

§3.1　点的极坐标和曲线的极坐标方程

一、主要内容

	直角坐标系	极坐标系
点的表示	$x=oA, y=oB$ (x,y)为点 P 的直角坐标 (图：y, B, P, o, A, x)	$\rho=oM, \theta=\angle xoM$ (ρ,θ)为点 M 的极坐标 (图：ρ, M, θ, o, x)
点与坐标的对应	$(x,y)\xleftrightarrow{\text{一一对应}}M$	$(\rho,\theta)\longrightarrow M$　　$\underset{(\text{非极点})}{M}\xrightarrow{\text{一多对应}}\begin{cases}(\rho,\theta+2k\pi)\\(-\rho,\theta+(2k+1)\pi)\\k\in Z)\end{cases}$ $\underset{(\text{极点})}{0}\xrightarrow{\text{一多对应}}(0,\alpha)$　$(\alpha\in R)$

（续表）

		直角坐标系	极坐标系
两点间距离公式		若 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，则 $\vert AB\vert = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	若 $A(\rho_1, \theta_1)$、$B(\rho_2, \theta_2)$，则 $\vert AB\vert = \sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$
坐标变换	平移	$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$	$\begin{cases} \rho\sin\theta = \rho'\sin\theta' + \rho_0\sin\theta_0 \\ \rho\cos\theta = \rho'\cos\theta' + \rho_0\cos\theta_0 \end{cases}$
	旋转	$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = \rho' \\ \theta = \theta' + \alpha \end{cases}$
		$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$	$\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ $\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi (x \neq 0) \\ \frac{\pi}{2} + k\pi (x = 0) \end{cases}$ $(k \in Z)$

二、应用举例

1. 求曲线的交点坐标

例 1 求两曲线 $\rho=3\cos\theta,\rho=1+\cos\theta$ 的交点坐标 $(0\leqslant\theta<2\pi)$.

解 由 $\begin{cases}\rho=3\cos\theta & (1)\\ \rho=1+\cos\theta & (2)\end{cases}$

消去 ρ，得

$$3\cos\theta=1+\cos\theta$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{1}{2} \text{ 即 } \theta_1=\frac{\pi}{3},\theta_2=\frac{5\pi}{3}$$

把 θ 的值代回方程组，得 $\rho_1=\frac{3}{2},\rho_2=\frac{3}{2}$. 即交点的极坐标是 $(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3})$ 与 $(\frac{3}{2},\frac{5\pi}{3})$.

又因为以 $\rho=0$ 代入式(1)得 $\theta=\frac{\pi}{2}$；以 $\rho=0$ 代入式(2)得 $\theta=\pi$，而点 $(0,\frac{\pi}{2})$、$(0,\pi)$ 都表示极点，故极点也是两曲线的交点.

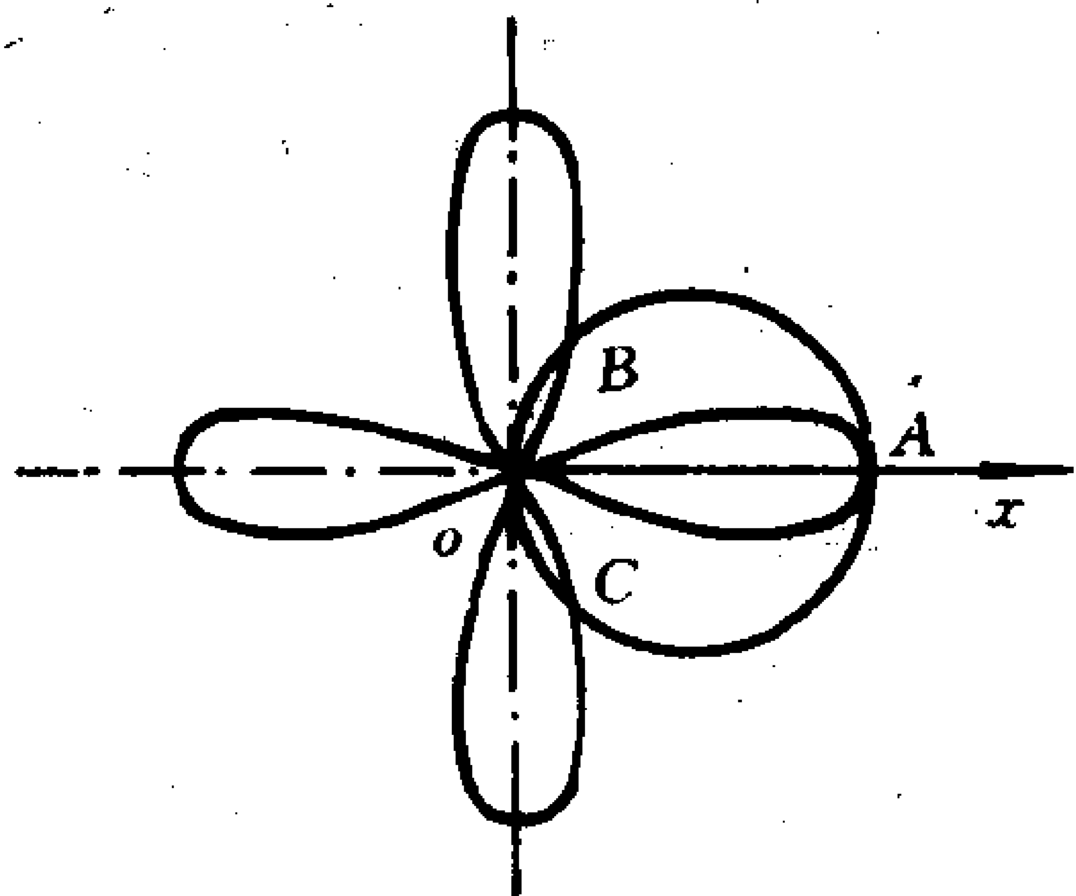


图 3-1

评注 由于点的极坐标不是唯一的，所以，通过解极坐标方程组来求两曲线的交点时，要注意有无重复和遗漏. 如果能够找出 α_1、$\alpha_2\in R$，使 $(0,\alpha_1)$ 与 $(0,\alpha_2)$ 分别满足两条曲线的极坐标方程，还要补充极点是两曲线的交点.

例 2 求曲线 $\rho=6\cos2\theta$ 与 $\rho=6\cos\theta$ 的交点坐标.

解 由 $\begin{cases}\rho=6\cos 2\theta\\ \rho=6\cos\theta\end{cases}$ 得 $\cos 2\theta=\cos\theta$

$\therefore\quad 2\theta=2n\pi\pm\theta\quad(n\in Z)$

$\therefore\quad \theta=\dfrac{2n\pi}{3}$

设 $k\in Z$，当 $n=3k$ 时，$\theta=2k\pi$，$\rho=6\cos 2k\pi=6$，得交点 $A(6,2k\pi)$；当 $n=3k+1$ 时，$\theta=2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}$，$\rho=6\cos(2k\pi+\dfrac{2\pi}{3})=-3$，得交点 $B(-3,2k\pi+\dfrac{2\pi}{3})$；当 $n=3k+2$ 时，$\theta=2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}$，$\rho=6\cos(2k\pi+\dfrac{4\pi}{3})=-3$，得交点 $C(-3,2k\pi+\dfrac{4\pi}{3})$.

因为 $(0,\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4})$ 和 $(0,k\pi+\dfrac{\pi}{2})$ 分别满足两曲线方程，所以极点也是交点.

2. 判别点的对称性和曲线的对称性

例 3 试证一点 $P(\rho,\theta)$ 关于

(1)极轴的对称点的坐标是 $[(-1)^n\rho,n\pi-\theta]$；

(2)极垂线(过极点与极轴垂直的直线)的对称点的坐标是 $[(-1)^n\rho,n\pi+(\pi-\theta)]$；

(3)极点的对称点的坐标是 $[(-1)^{n-1}\rho,n\pi+\theta]$.

此处 n 是整数.

证明 (1)一点 $P(\rho,\theta)$ 关于极轴的对称点的坐标可写作 $(\rho,-\theta)$，$(-\rho,\pi-\theta)$，…，一般的形式为 $(\rho,2m\pi-\theta)$ 或 $[-\rho,(2m+1)\pi-\theta]$，这里 m 是整数．而这两种形式又可写作 $[(-1)^n\rho,n\pi-\theta]$，这里 n 是整数.

(2)和(3)的证明与(1)完全类似，故从略.

评注 本题是在 ρ 和 θ 的值扩大到 $\rho\in R$、$\theta\in R$ 进行讨论的，如果规定 $\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$，则一点(除极点外)的极坐标

是唯一的，故其对称点的极坐标也是唯一的.

例4 若$P(\rho,\theta)$适合方程$\rho=f(\theta)$，且有一整数n，使

(1)$[(-1)^n\rho,n\pi-\theta]$也适合方程，则此曲线关于极轴对称；

(2)$[(-1)^n\rho,n\pi+(\pi-\theta)]$也适合此方程，则此曲线关于极垂线对称；

(3)$[(-1)^{n-1}\rho,n\pi+\theta]$也适合此方程，则此曲线关于极点对称.

证明 (1)由例3知，$P'[(-1)^n\rho,n\pi-\theta]$是$P$点关于极轴的对称点，而$P(\rho,\theta)$是曲线上任一点，又$P'$的坐标也适合曲线的方程，即说明曲线上任一点关于极轴的对称点也在曲线上，因此曲线关于极轴对称.

(2)和(3)的证明与(1)完全类似，故从略.

评注 本题也是在$\rho\in R$、$\theta\in R$时进行讨论的，在具体应用时，只要取其中某个定值n进行验证即可. 但要注意，由于点的极坐标的多样性，所以当取某一个定值n，坐标不适合方程时，并不能因此就断定曲线无对称性.

例5 试证曲线$\rho=\dfrac{a}{\theta-\dfrac{\pi}{2}}$($a$是定数)关于极轴对称.

证明 因为以$(-\rho,\pi-\theta)$代(ρ,θ)，原方程成立，所以曲线关于极轴对称.

例6 试判断曲线C:$\rho=\theta$关于极点、极轴和过极点且垂直极轴的直线l的对称性.

首先，容易看到，任一点$M(\rho,\theta)\in C$关于极点、极轴和直线l的对称点分别为$M'(-\rho,\theta)$，$M''(\rho,-\theta)$和$M'''(-\rho,-\theta)$. 因此，只要在$\rho=\theta$条件下判断点M'、M''和M'''是否$\in C$就行了.

显然，$M'(-\rho,\theta)$是不满足 $\rho=\theta$ 的，正如上述，即使如此，也不能判定 $M'\overline{\in}C$. 因为根据极方程的特点，这样判定至少在理论上是没有根据的. 然而，则于 $M'(-\rho,\theta)$所有形式的极坐标都包含在$((-1)^n\cdot(-\rho),\theta+n\pi)=((-1)^{n+1}\rho,\theta+n\pi)$中，所以，可将统一形式的极坐标化入方程 $\rho=\theta$ 得

$$(-1)^{n+1}\rho=\theta+n\pi$$

因为 $\rho=\theta$，故又有$(-1)^{n+1}\theta=\theta+n\pi$，即

$$[(-1)^n-1]\theta=n\pi$$

由于 θ 是任意实数，显然不存在整数 n 使上式成立. 这说明，无论是 M' 的哪种形式的极坐标，都不满足方程 $\rho=\theta$，故可判定 $M'\overline{\in}C$，从而曲线 C 关于极点不对称. 依照同样方法可以判定，曲线关于极轴也不对称，而关于极垂线l是否对称呢？因为$\rho=\theta$，所以$-\rho=-\theta$. 即$M''(-\rho,-\theta)$适合方程 $\rho=\theta$，可判定 $M'''\in C$，从而曲线 C 关于极垂线对称(图 3—2).

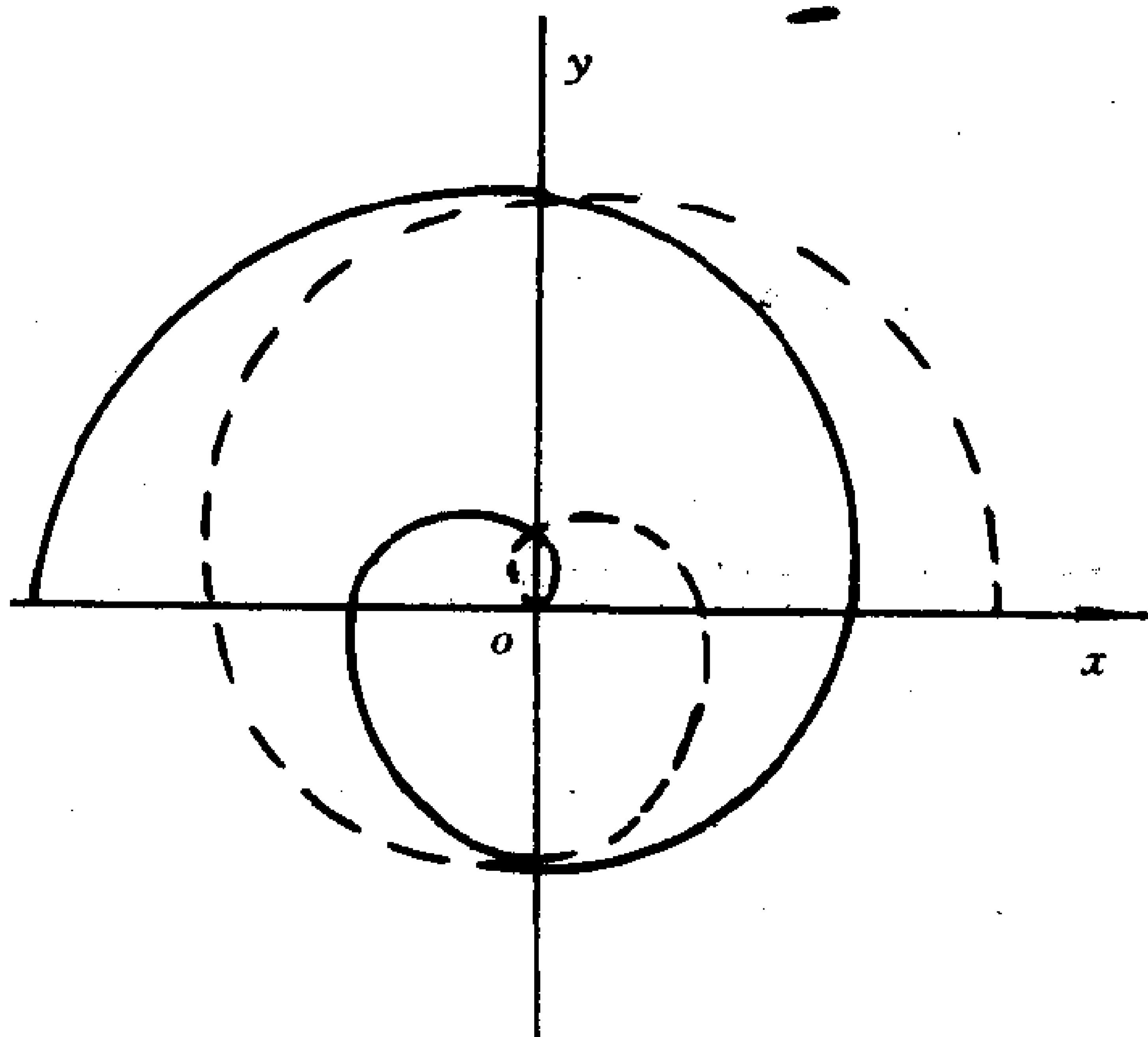


图 3—2.

例 7 讨论曲线 $\rho=a^2\cos\theta\cos2\theta$ 的对称性.

解 因为以$(\rho,-\theta)$代(ρ,θ)，方程成立，所以曲线关于极轴对称.

又因为对于任意的整数 n，以 $n\pi+(\pi-\theta)$代 θ，则

$$a^2\cos[n\pi+(\pi-\theta)]\cos 2[n\pi+(\pi-\theta)]$$
$$=(-1)^{n+1}\rho\neq(-1)^n\rho$$

所以曲线关于极垂线不对称

同理，对于任意的整数 n 以 $n\pi+\theta$ 代 θ，则

$$a^2\cos(n\pi+\theta)\cos 2(n\pi+\theta)=(-1)^n\rho\neq(-1)^{n-1}\rho$$

故曲线关于极点也不对称．

3. 判定曲线方程的等价性

将表示同一曲线的两个方程称为互为等价方程.

若二极坐标方程 $F_1(\rho,\theta)=0$ 和 $F_2(\rho,\theta)=0$ 满足下列两条，称他们是等价的.

(1)若 $P_1(\rho_1,\theta_1)$使 $F_1(\rho_1,\theta_1)=0$ 成立，则存在整数 n 使 $F_2((-1)^n\rho_1,n\pi+\theta)=0$ 成立；

(2)若 $P_2(\rho_2,\theta_2)$使 $F_2(\rho_2,\theta_2)=0$ 成立，则存在整数 n 使 $F_1((-1)^n\rho_2,n\pi+\theta)=0$ 成立.

例 8 化 $(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$ 为极坐标方程.

解 将 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$ 代入原方程，整理得

$$\rho^2=e^2(\rho\cos\theta+p)^2$$

即得

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta} \tag{1}$$

$$\rho=\frac{-ep}{1+e\cos\theta} \tag{2}$$

将方程(1)变形为

$$(-1)^k\rho=\frac{ep}{1-e\cos(k\pi+\theta)}$$

令 $k=1$ 时，有

$$\rho=\frac{-ep}{1+e\cos\theta}$$

故方程(1)和(2)等价.

所以极坐标方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}\left(\text{或}\ \rho=\frac{-ep}{1+e\cos\theta}\right)$$

评注 在化直角坐标方程为极坐标方程时,得到几个形式不同的方程后,需判断一下其等价性,从中选择出正确的答案.

例 9 化 $x^3+xy^2-5x^2-y^2+4x=0$ 为极坐标方程.

解 将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入原方程,整理得

$$\rho(\rho-4\cos\theta)(\rho\cos\theta-1)=0$$

因为方程 $\rho=0$ 只表示极点,而极点在曲线 $\rho-4\cos\theta=0$ 上,所以可舍去方程 $\rho=0$.

下面判断方程 $\rho-4\cos\theta=0$ 与 $\rho\cos\theta-1=0$ 是否等价.

将方程 $\rho=4\cos\theta$ 以$[(-1)^n\rho, n\pi+\theta]$代$(\rho,\theta)$,得

$$(-1)^n\rho=4\cos(n\pi+\theta)$$

当 n 为奇数时,得 $\rho=4\cos\theta$;当 n 为偶数时,也得 $\rho=4\cos\theta$. 故方程 $\rho=4\cos\theta$ 与 $\rho\cos\theta=1$ 不等价.

所以极坐标方程是

$$(\rho-4\cos\theta)(\rho\cos\theta-1)=0$$

例 10 化极坐标方程 $\rho=\sin\theta+2\cos\theta$ 为直角坐标方程.

解 因为当 $\theta=-\mathrm{arctg}2$ 时 $\rho=0$,即极点坐标适合原极坐标方程,所以可将方程两边同乘以 ρ,得

$$\rho^2=\rho\sin\theta+2\rho\cos\theta$$

转化为直角坐标方程

$$x^2+y^2=y+2x\ \text{即}\ (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

评注 为了直接应用 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 来转化方程,常需在方程的两边同乘以 $\rho^n(n\in N)$,但必须检验极点坐标是

否适合于原极坐标方程.

例 11 化极坐标方程 $\rho=a\theta(a>0)$ 为直角坐标方程.

解 由于 ρ 可以取正值、负值或零，因此以 $\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入原方程，得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=a\theta$$

当 $x\neq 0$ 时，得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=a\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+k\pi\right)\quad(k\in Z)$$

容易证明，分别取正、负号的两个方程不等价.

当 $x=0$ 时，得

$$y=\pm a\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\quad(k\in Z)$$

显然，分别取正、负号的两个方程等价.

故原极坐标方程的直角坐标方程为

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=a\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+k\pi\right)\quad(x\neq 0,K\in Z)$$

$$y=a\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\quad(x=0,k\in Z)$$

例 12 化极坐标方程 $\rho\cos^2\frac{\theta}{2}=a$ 为直角坐标方程.

解 由原方程 $\rho\cos^2\frac{\theta}{2}=a$ 得

$$\rho\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}=a \text{ 即 } \rho=2a-x$$

再平方，得

$$\rho^2=(2a-x)^2 \text{ 即 } y^2=-4a(x-a)$$

评注 这里由 $\rho=2a-x$ 两边再平方时，方程增加了 $\rho=x-2a$ 的解，即 $\rho\sin^2\frac{\theta}{2}=-a$. 但由于 $\rho\cos^2\frac{\theta}{2}=a$ 与 $\rho\sin^2\frac{\theta}{2}=-a$ 为等价方程，所以原极坐标方程的直角坐标方程为 y^2

$=-4a(x-a)$.

习 题 3.1

1. 求极轴上到点$(4\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$的距离等于5的点的坐标.

2. 已知点$A(\rho_1,\theta_1)$、$B(\rho_2,\theta_2)$的极坐标满足如下关系:$\rho_1+\rho_2=0,\theta_1+\theta_2=0$,问$A$、$B$两点具有怎样的对称性?

3. 求两曲线$\rho=1+\cos\theta,\rho=\frac{1}{2(1-\cos\theta)}$的交点坐标$(0\leqslant\theta<2\pi)$.

4. 已知两曲线的极坐标方程为$\rho=\sin3\theta,\rho=\cos2\theta$,求它们的交点坐标$(0\leqslant\theta<2\pi)$.

5. 试证下列曲线关于极轴对称:

(1)$\rho=\sin\frac{\theta}{2}$;(2)$\rho=\sin\frac{\theta}{2k}$($k$是定自然数)

6. 试证下列曲线关于极垂线对称:

(1)$\rho=a\theta$(a是定数);(2)$\rho=\sin\frac{\theta}{3}$

7. 试证下列曲线关于极点对称:

(1)$\rho^2=\sin2\theta$;(2)$\rho=\cos\frac{\theta}{2}$;(3)$\rho=\cos\frac{\theta}{2k}$ $(k\in N)$

8. 讨论曲线$\rho=a\sin3\theta$ $(a>0)$的对称性.

9. 判断$\rho=\sin\frac{\theta}{2}$与$\rho=\cos\frac{\theta}{2}$是否等价?

10. 化$(x^2+y^2)^3=(x^2-y^2)^2$为极坐标方程.

11. 化$x^2=2a(y+\frac{a}{2})$为极坐标方程.

12. 化$\rho=2-\sin\theta$为直角坐标方程.

13. 化$\rho=\sqrt{1-\sin^2\theta}$为直角坐标方程.

14. 化$\rho^2\sin\theta+\rho=0$为直角坐标方程.

15. 试证$\rho=a(\sec\theta+\csc\theta)$表示等轴双曲线,并证$\rho\cos\theta=a$,$\rho\sin\theta=a$是它的两条渐近线.

16. $P_1(\rho_1,\theta_1)$、$P_2(\rho_2,\theta_2)$为曲线$\ln\rho=a\theta$ $(2k\pi\leqslant\theta<(2k+2)\pi,k\in Z)$上任意两点,直线$\theta=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$与曲线的交点$P$的极径是$\rho$.求证:

$\rho^2=\rho_1\cdot\rho_2$.

17. 已知△ABC三顶点的极坐标为$A(\rho_1,\theta_1)$、$B(\rho_2,\theta_2)$、$C(\rho_3,\theta_3)$，求证：三角形面积

$$S=\frac{1}{2}\left|\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\rho_2\rho_3\sin(\theta_3-\theta_2)+\rho_3\rho_1\sin(\theta_1-\theta_3)\right|$$

§3.2 曲线的方程与方程的曲线

一、主要内容

曲线L上的点和方程$\varphi(\rho,\theta)=0$的解有如下对应关系：

(1)曲线L上每一点的极坐标中至少有一个是方程的解；

(2)以方程的解为坐标的点都是曲线L上的点.

把这个方程叫做曲线L的方程；这条曲线叫做方程的曲线.

曲线的极坐标方程的建立方法，同直角坐标系下建立普通方程$F(x,y)=0$的方法类似，实际上是确定表示动点位置的极坐标(ρ,θ)中的径坐标变数ρ和角坐标变数θ之间的解析关系.

由已知的极坐标方程作图，设值描点法是最基本的方法.在设值过程中，不可能也不必要将θ的可取值取遍，这就需要先对曲线的范围、对称性等作些必要的讨论，然后再着手设值描点.

二、应用举例

1. 由几何轨迹求方程

例1 设有一个直角三角形OAP，它的斜边OA等于定长$2a$，求直角顶点P的轨迹的极坐标方程.

解 取射线 OA 为极轴，O 为极点，见图 3－3，$OA=2a$.

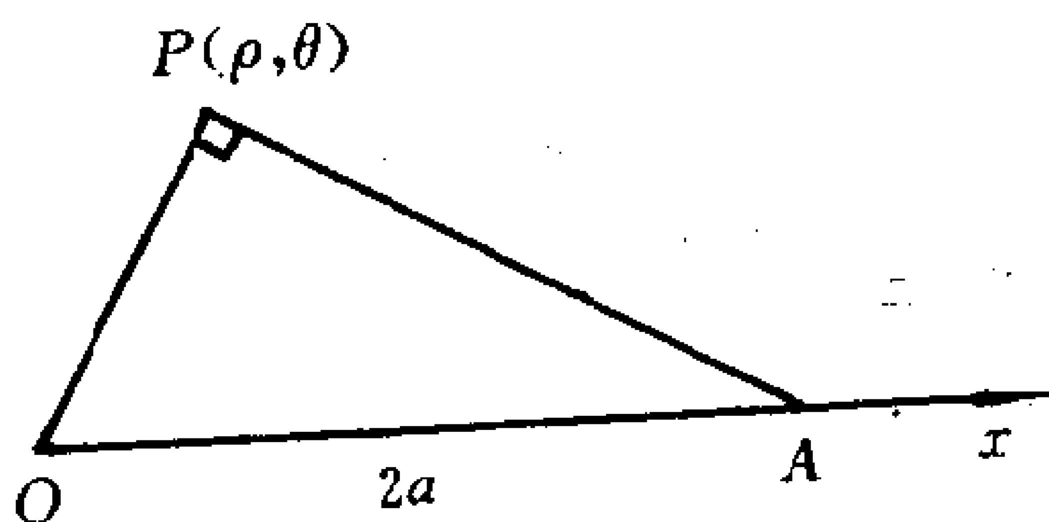


图 3－3

设直角顶点为 $P(\rho,\theta)$，则在直角三角形 OAP 中，

$$OP=OA\cos\theta$$

即 $\rho=2a\cos\theta \quad (\theta\neq k\pi, k\in Z)$

这就是所求轨迹的方程，是以斜边为直径的一个圆.

评注 在建立曲线的极坐标方程时，首先要选取适当的坐标系. 不同的极坐标系下的曲线方程的形式是不同的，但并不改变曲线本身的性质. 通常极坐标系的建立，总是选取使方程尽可能简化的位置条件. 一般选取定点、定直线来作极点、极轴，或是在与定直线平行或垂直的方向上选取极轴.

例 2 如图 3－4 所示，已知定圆 C 及其外一定点 o. 在圆 C 上任取一点 A，连结 oA，以 oA 为一边作正三角形 oAP 使 o、A、P 按逆时针旋转排列. 试确定 P 点轨迹的极坐标方程.

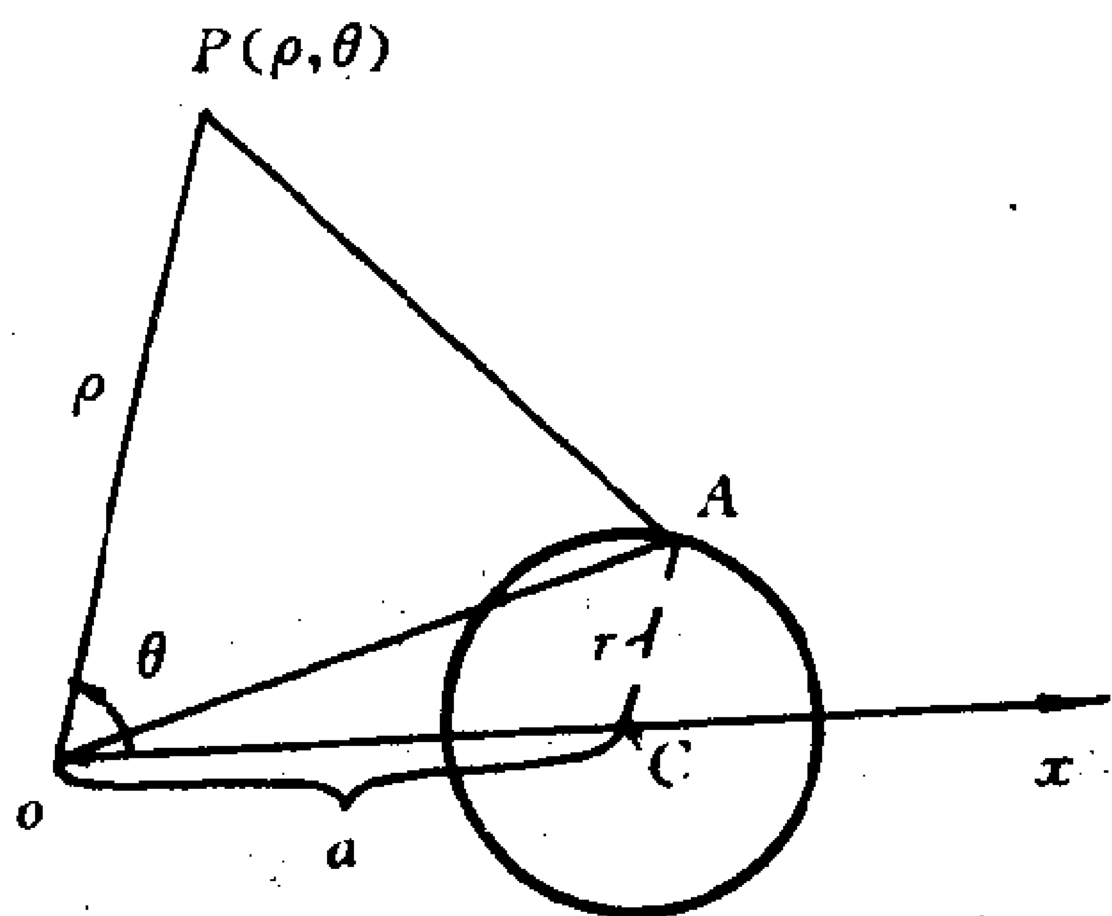


图 3－4

解 以定点 o 为极点，射线 oC 为极轴，建立坐标系.

设 $oC=a$，圆 C 的半径为 r，在圆上任取一点 A，连接 oA，作正三角形 oAP，并设 $P(\rho,\theta)$，连结 AC，在 $\triangle oAC$ 中，$oA=\rho$，$oC=a$，$AC=r$，$\angle AoC=\theta-\frac{\pi}{3}$，则由余弦定理，得

$$\cos(\theta-\frac{\pi}{3})=\frac{a^2+\rho^2-r^2}{2a\rho}\quad(\frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}+\arcsin\frac{r}{a})$$

这就是所求轨迹的方程. 作平移变换，使极点移到$(a,\frac{\pi}{3})$，则方程化简为 $\rho'=r$. 故此轨迹是以$(a,\frac{\pi}{3})$为圆心，r 为半径的圆.

评注

1° 在确定 ρ 和 θ 的解析关系 $F(\rho,\theta)=0$ 时，由于 ρ 是线段的数值，θ 是角的数值，而三角函数是建立线段数值和角数值间的关系的函数，所以三角函数在求曲线的极坐标方程时被经常用到.

2° 此例若设极轴在与 oC 垂直的直线上，见图 3—5、3—6 则曲线方程相应地变为

$$\sin(\theta-\frac{\pi}{3})=\frac{a^2+\rho^2-r^2}{2a\rho}\quad(\frac{5\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{6}+\arcsin\frac{r}{a})$$

$$\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)=\frac{a^2+\rho^2-r^2}{2a\rho}\quad(\frac{11\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{11\pi}{6}+\arcsin\frac{r}{a})$$

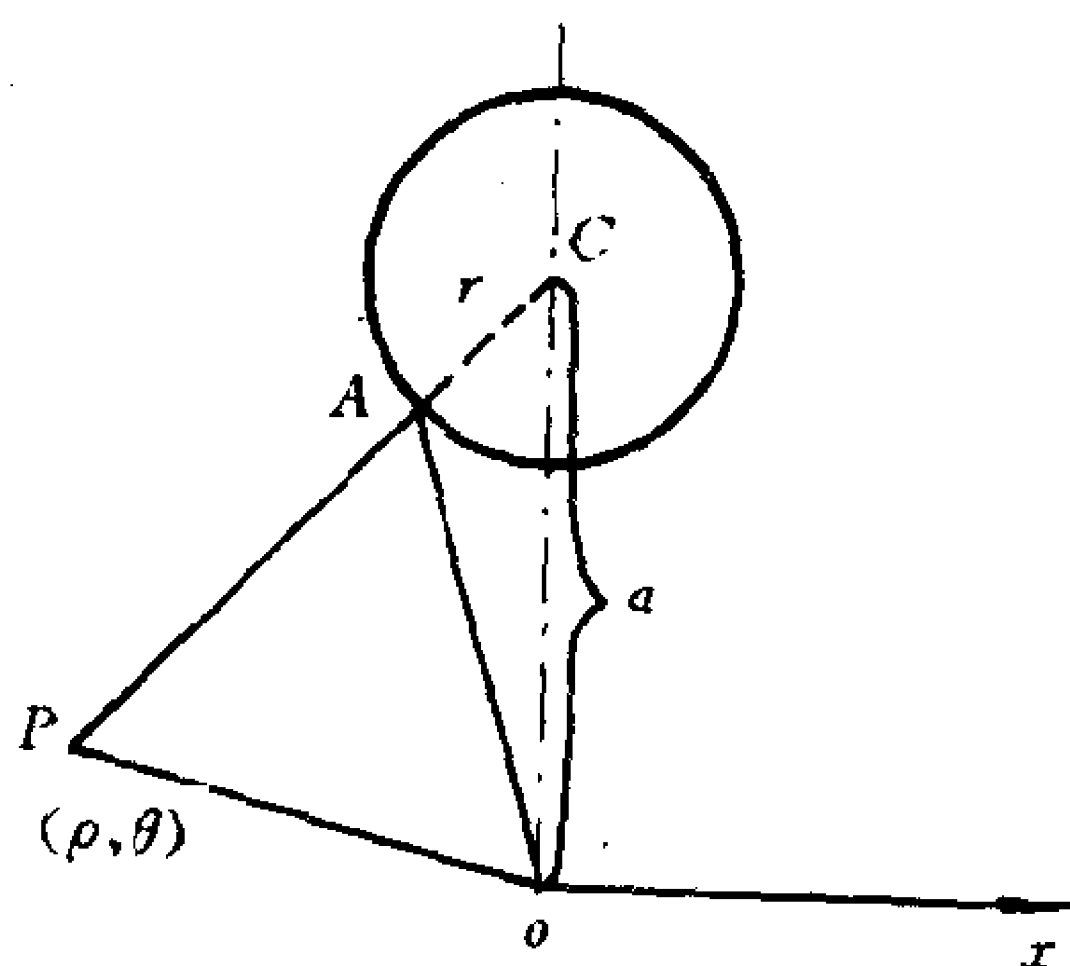


图 3—5

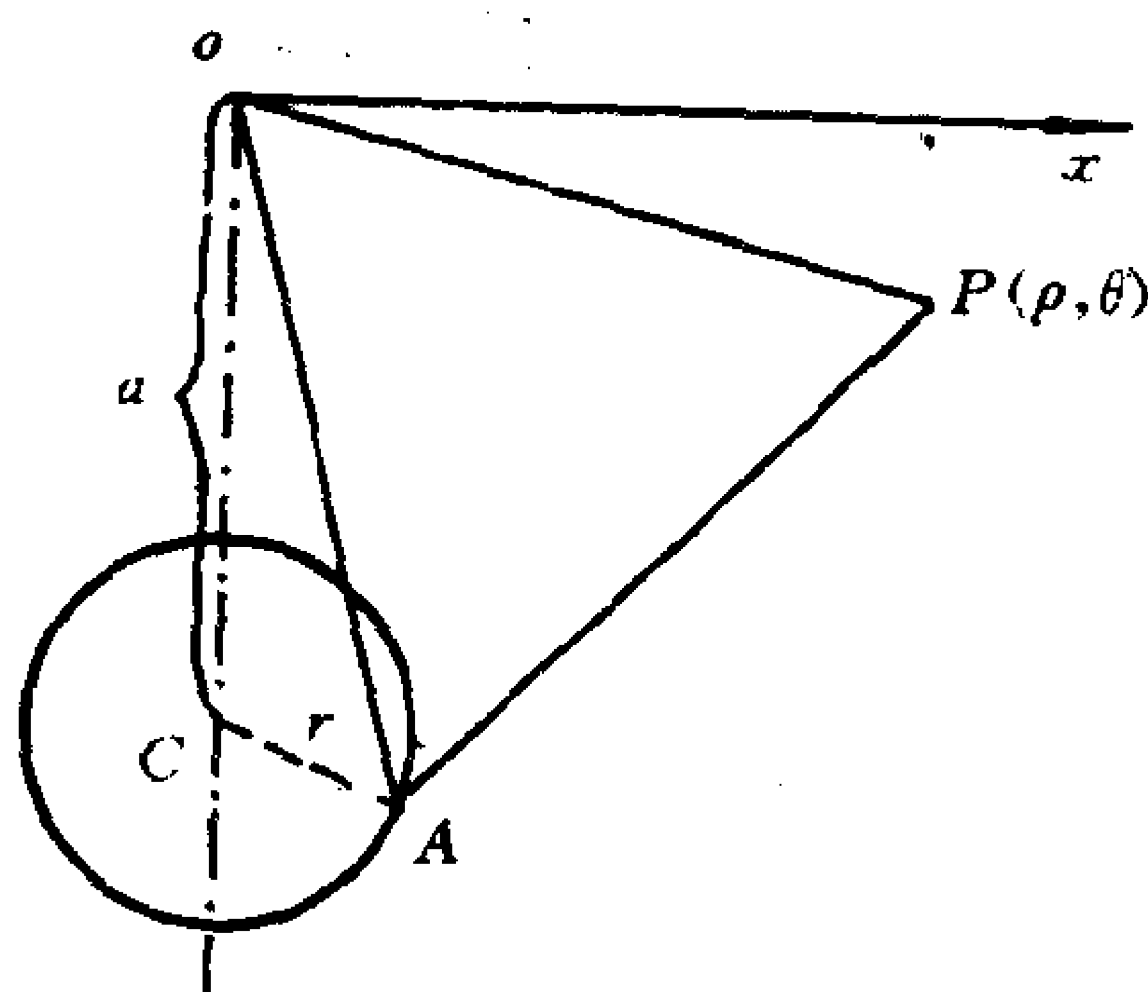


图 3—6

例3 见图 3－7，AB 是圆 o 一直径，且 $|AB|=2a(a\neq 0)$，M 是圆上一动点，作 $MN\perp AB$，垂足为 N，在 oM 上取点 P，使 $|oP|=|NM|$，求点 P 的轨迹.

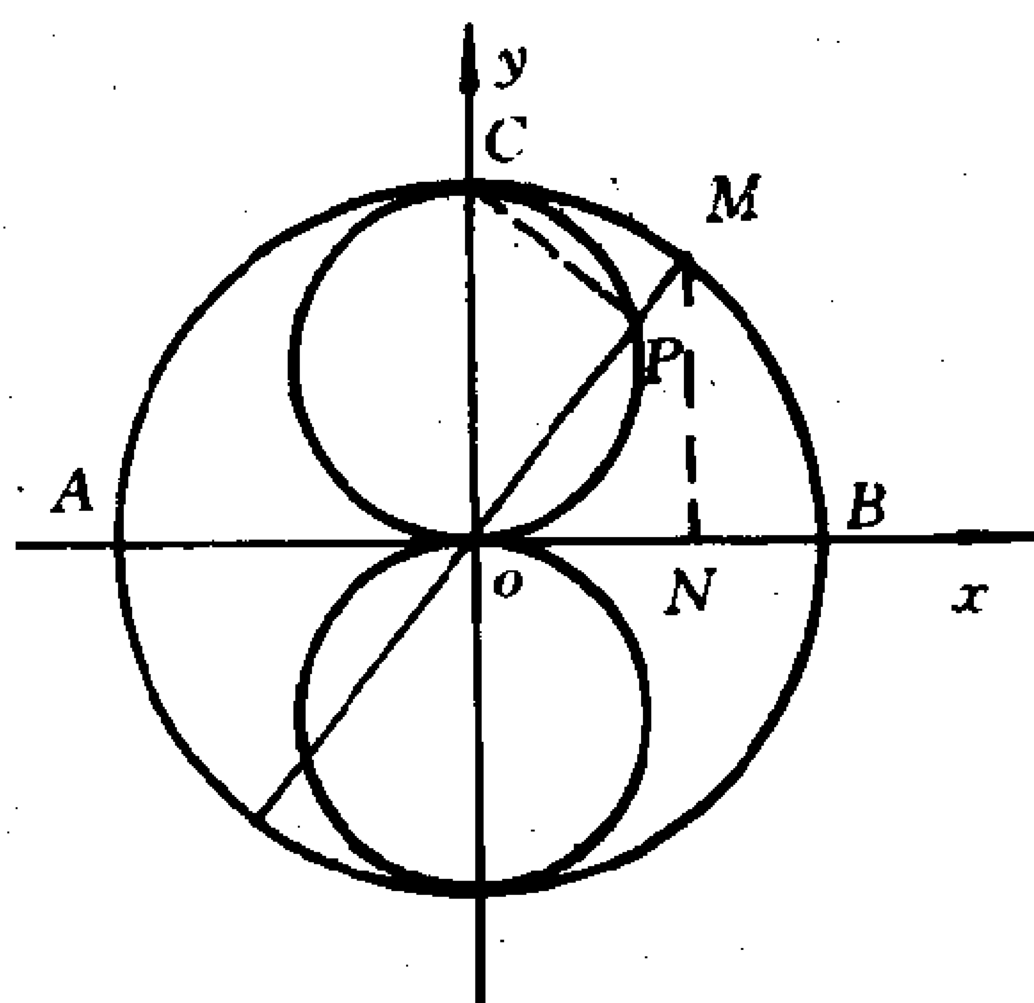


图 3－7

解法一 建立如图 3－7 的直角坐标系，则圆 o 的方程为

$$x^2+y^2=a^2$$

当点 M 在上半圆周上运动时

$$\because |oP|=|MN|,|oC|=|oM|,\angle PoC=\angle oMN$$

$$\therefore \triangle PoC\cong\triangle NMo$$

$$\therefore \angle CPo=\angle oNM=\frac{\pi}{2}.$$

即 $CP\perp oM$

设点 P 的坐标为 (x,y)，又点 C 为 $(0,a)$ 则 $k_{OM}=\dfrac{y}{x}$，$k_{CP}=\dfrac{y-a}{x}$，故有

$$\frac{y}{x}\cdot\frac{y-a}{x}=-1$$

即 $$x^2+y^2-ay=0$$

同理，当点 M 在下半圆周上运动时，有

$$x^2+y^2+ay=0$$

所以点 P 的坐标满足方程 $x^2+y^2\pm ay=0$，其轨迹为两个圆.

解法二 建立如图 3－8 的极坐标系，设点 P 的坐标为

(ρ,θ)，则 $|oP|=\rho$，$|MN|=|a\sin\theta|$

$$\therefore \rho=\pm a\sin\theta$$

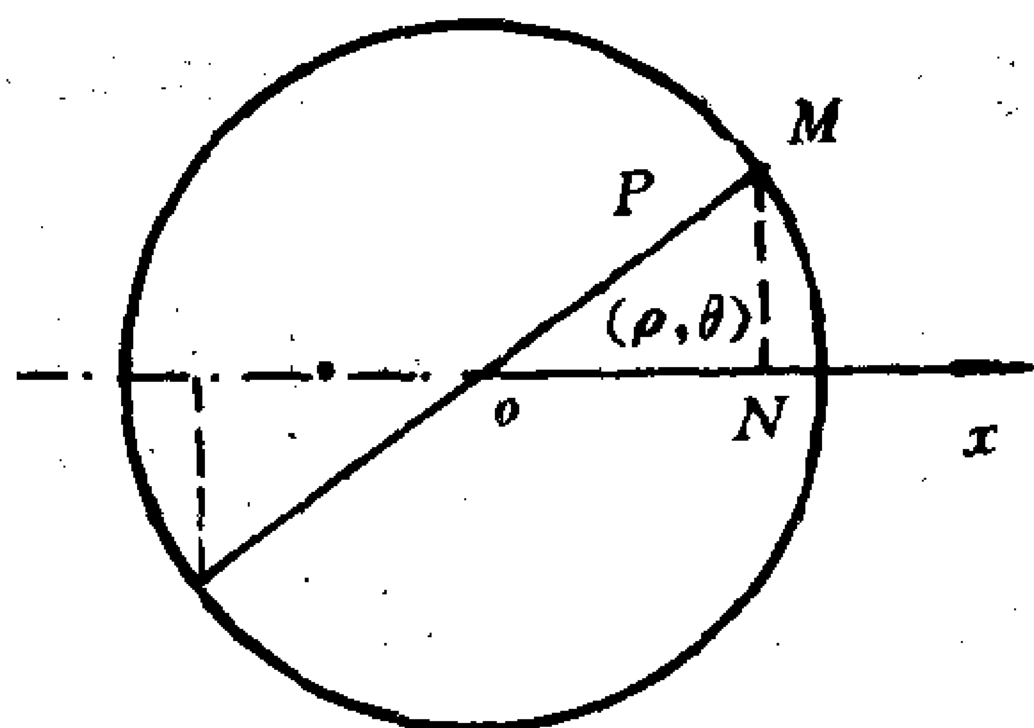


图 3－8

其轨迹为两个圆.

评注 以上解法一与解法二给出了这样一个事实，由于极坐标系中的径坐标数直接给出了动点到原点的距离，角坐标数显示了与极轴夹角的大小，所以在处理与距离或旋转有关的几何问题时，使用极坐标系较使用直角坐标系具有直观、简便、计算量小等优点.

例 4 设 o 为圆的圆心，M 为圆内一定点，任作一半径 oB，连结 MB，并自 M 作 MB 的垂线 MP 交 oB 于 P. 试求点 P 的轨迹方程.

解 建立如图 3－9 所示的直角坐标系，设定圆的半径为 a，定点到定圆的距离 $oM=b$，则点 $B(a\cos\theta,a\sin\theta)$，$M(b,0)$. 又以 o 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，设 $P(\rho,\theta)$ 为轨迹上任一点，则 P 在直角坐标系下的坐标为 $(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$.

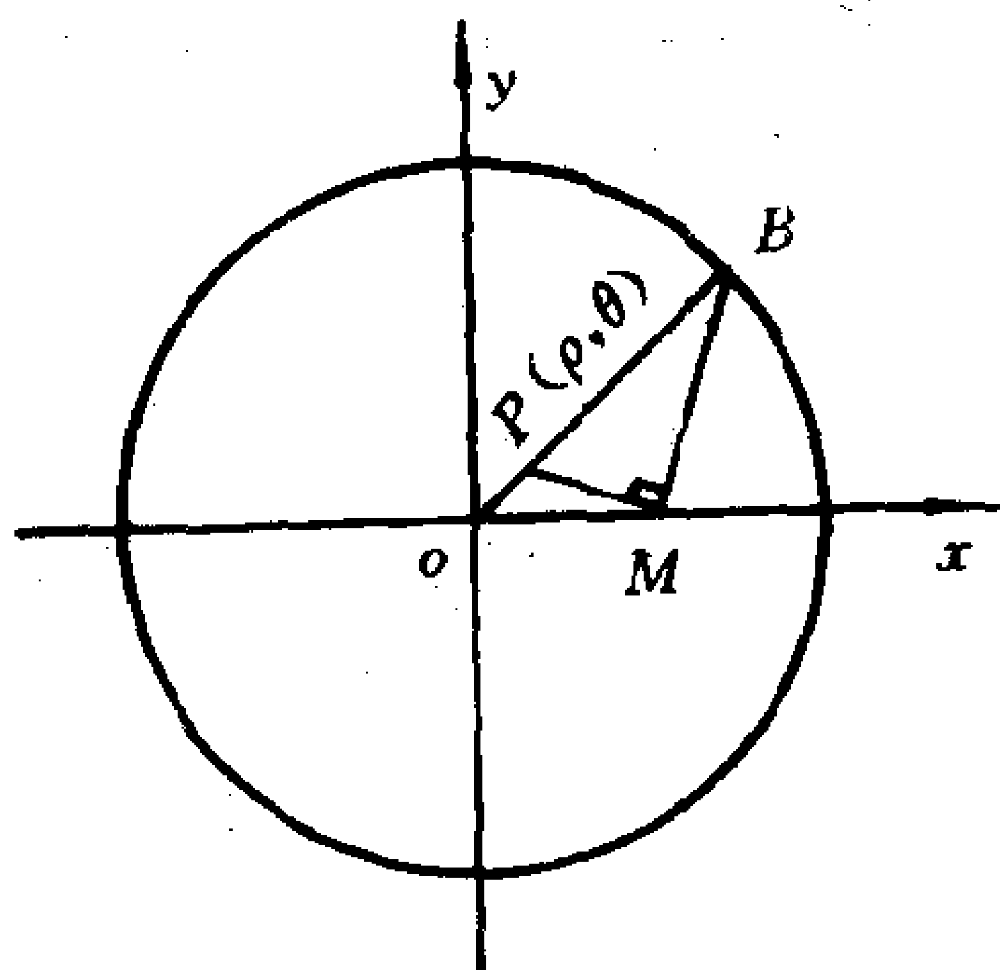


图 3－9

$$\because PM\perp MB,k_{PM}=\frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta-b},k_{MB}=\frac{a\sin\theta}{a\cos\theta-b}$$

$$\therefore \frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta-b}\cdot\frac{a\sin\theta}{a\cos\theta-b}=-1$$

即 $$\rho=\frac{b(b-a\cos\theta)}{b\cos\theta-a}\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

评注 为了解题方便，也可将直角坐标系与极坐标系一起使用．这样互相补充，各取其长，能减少计算量，增强解题技巧性.

例 5 半径为 a 的定圆上有两个动点 P、Q，同一时间自圆上定点 A 出发按逆时针方向作匀角速度运动，点 P 的角速度为 ω，点 Q 的角速度是点 P 的 k 倍(k 为定数). 试求线段 PQ 中点 M 的轨迹的极坐标方程.

分析 点 P、Q 的位置由时间确定，取运动时间 t 为参数，点 P、Q 的极坐标即可确定. 从而点 M 也可确定.

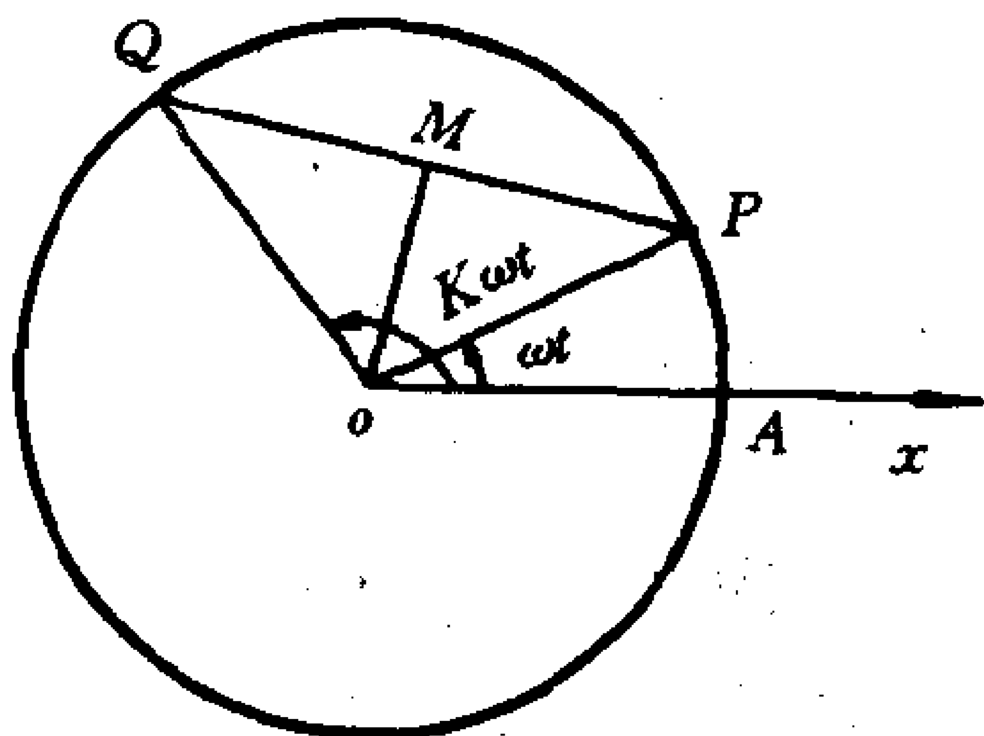


图 3－10

解 如图 3－10，取圆心 o 为极点，射线 oA 为极轴，建立极坐标系．取点 P、Q 自点 A 出发运动的时间 t 为参数，点 P、Q 的角速度分别为 ω、$k\omega$，故点 P、Q 的极坐标分别为$(a,\omega t)$和$(a,k\omega t)$. 设 $M(\rho,\theta)$为轨迹上任一点，则

$$\rho=oP\cos(\overrightarrow{oP},\overrightarrow{oM})=a\cos\frac{k\omega t-\omega t}{2}=a\cos\frac{k-1}{2}\omega t \quad (1)$$

$$\theta=\frac{1}{2}(k\omega t+\omega t)=\frac{k+1}{2}\omega t \quad (2)$$

从(1)、(2)中消去参数 t，即得轨迹的极坐标方程为

$$\rho=a\cos\frac{k-1}{k+1}\theta$$

例 6 给定半径为 a 的圆及其上的定点 o，过 o 任意作弦，求这些弦的中点的轨迹.

解 见图 3－11 取 o 为极点，过 o 的直径所在的射线为极轴建立极坐标，那么这时的已知圆方程为

$$\rho = 2a\cos\varphi$$

设过 o 的任意弦 oP_0 的中点为 $M(\rho,\varphi)$，P_0 的坐标为 $(\rho_0、\varphi_0)$，那么显然有

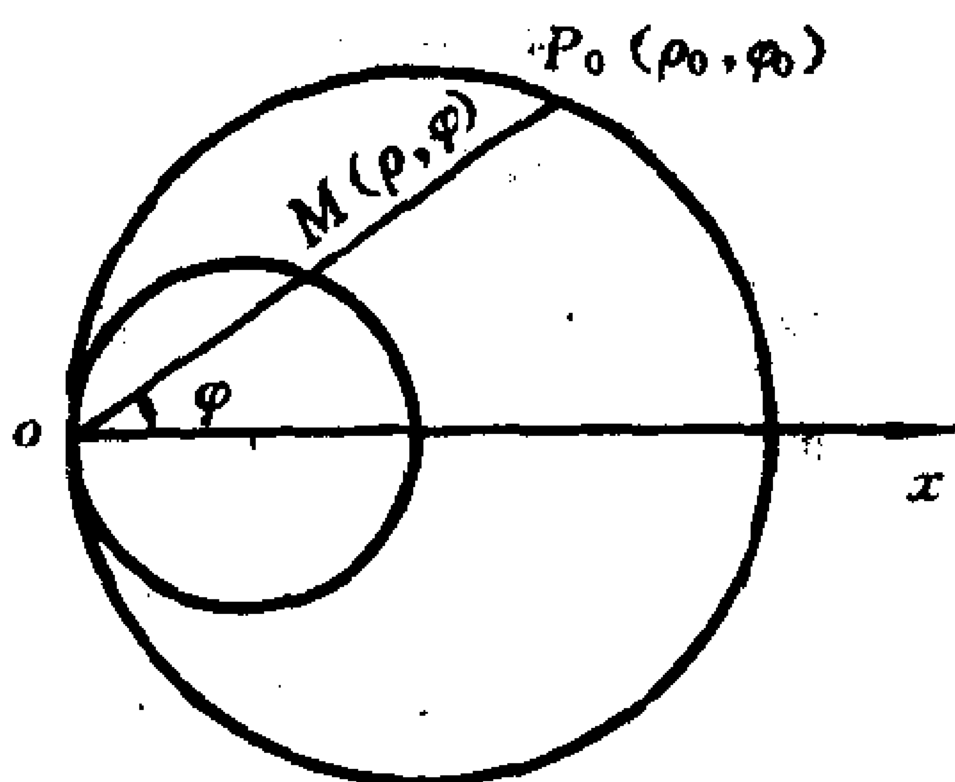


图 3－11

$$\rho_0 = 2\rho, \varphi_0 = \varphi \tag{3}$$

而 P_0 在已知圆上，从而有

$$\rho_0 = 2a\cos\varphi_0 \tag{4}$$

将(3)代入(4)，得

$$2\rho = 2a\cos\varphi$$

即
$$\rho = a\cos\varphi$$

这就是所求的轨迹方程，它是一个半径为 $\frac{a}{2}$ 的圆.

小结 与直角坐标系下求曲线的方程类似，在极坐标系下求曲线的方程也可按以下几种方法进行分类：

1° 直接由轨迹上的点所满足的几何条件列出等式，然后代入坐标，得到动点坐标所满足的方程，这种求轨迹方程的方法叫做直接法. 如例 1 用的就是直接法.

2° 将动点 M 的坐标 (ρ,θ) 转移到题中给定的图形上的点的坐标，以间接地求得动点 M 的轨迹方程，这种方法叫做转移法. 如例 6 用的就是转移法.

3° 将曲线上任意点的坐标 ρ、θ 都表示成某个参数 t 的函数，然后消去参数 t 得 ρ、θ 的关系式以得到动点的轨迹方程，这种方法叫做参数法. 如例 5 用的就是参数法.

读者应根据已知条件，灵活地选择方法，才能奏效.

2. 由方程研究曲线

例 7 作 $\rho=\cos 2\theta$ 的图象.

解 设 $f(\rho,\theta)=\rho-\cos 2\theta$

$$\because f(\rho,-\theta)=\rho-\cos 2(-\theta)=\rho-\cos 2\theta$$

$$f(\rho,\pi+\theta)=\rho-\cos 2(\pi+\theta)=\rho-\cos 2\theta$$

$$f(\rho,\pi-\theta)=\rho-\cos 2(\pi-\theta)=\rho-\cos 2\theta$$

∴曲线关于极轴、极点、极垂线都对称

又因为 $\rho=\cos 2\theta\leqslant 1$，且 $\rho\geqslant -1$，所以曲线在圆 $\rho=1$ 的内部或圆上.

为了利用对称性，先作出在 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 范围内的图象，设值列表如下：

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1

由此可描出图中实线部分，再由对称性即得全图. 这种曲线叫四叶玫瑰线，见图 3—12

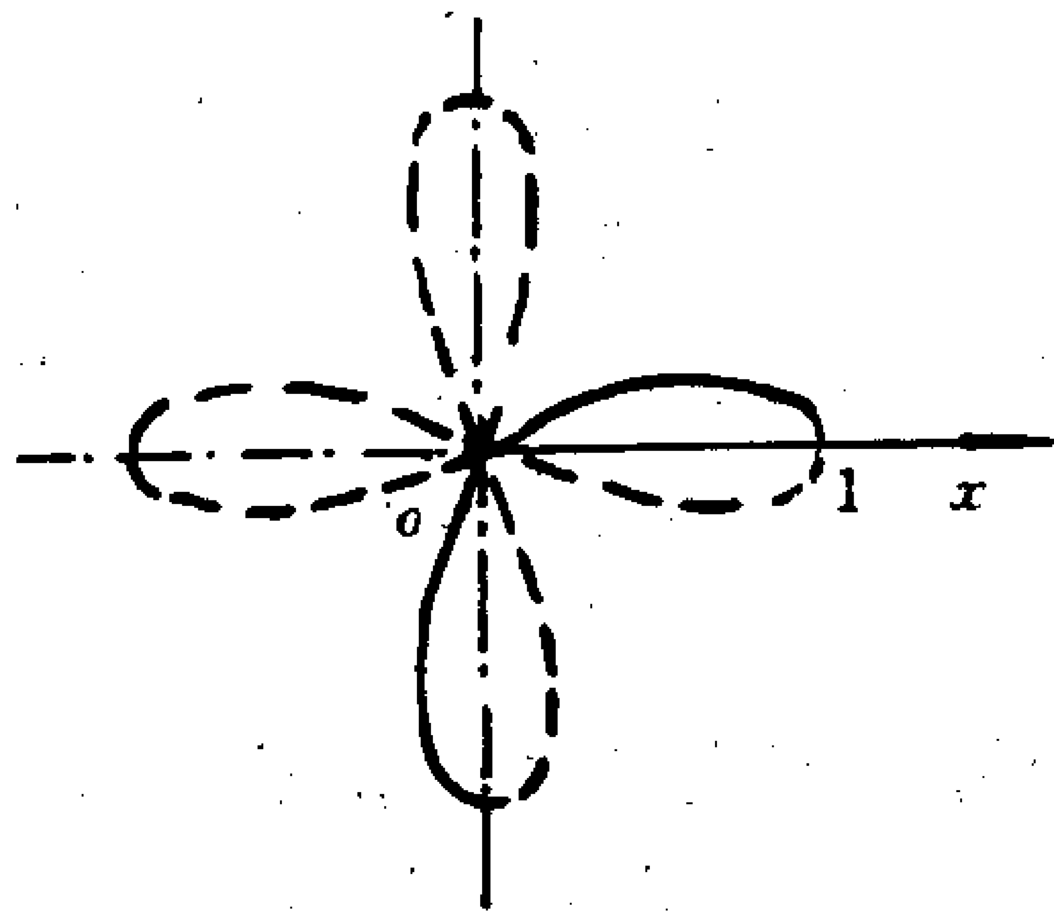


图 3—12

评注 在利用对称性描图设值列表时，必须注意 $\rho<0$ 的点不能一概略去，比如此题若略去 $\rho<0$ 的点，则得到的曲线只有左右两瓣了.

例 8 作 $\rho=2\sin\frac{2\theta}{3}$的图象.

解 以$(-\rho,3\pi-\theta)$代(ρ,θ)、以$(\rho,3\pi-\theta)$代(ρ,θ)、以$(\rho,3\pi+\theta)$代(ρ,θ)，方程都不改变，故曲线关于极轴、极垂线、极点都对称.

显然，曲线在圆 $\rho=2$ 的内部或圆上.

由 $2\sin\frac{2\theta}{3}=0$ 有 $\theta=\frac{3k\pi}{2}$ $(k\in Z)$，故曲线过极点.

又因为当 $\theta=\pi$ 时，$\rho=\sqrt{3}$，$\theta=4\pi$ 时，$\rho=\sqrt{3}$

∴曲线与极轴有两交点$(\sqrt{3},\pi)$与$(\sqrt{3},4\pi)$

又因为当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，$\rho=\sqrt{3}$，$\theta=\frac{5\pi}{2}$时 $\rho=-\sqrt{3}$

∴曲线与极垂线有两交点$(\sqrt{3},\frac{\pi}{2})$与$(-\sqrt{3},\frac{5\pi}{2})$

利用对称性，可先作出$[0,\frac{3\pi}{2}]$内的图象．设值列表如下：

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
ρ	0	1	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	1	0

由此可描出图中实线部分，再由对称性即得全图，见图 3—13.

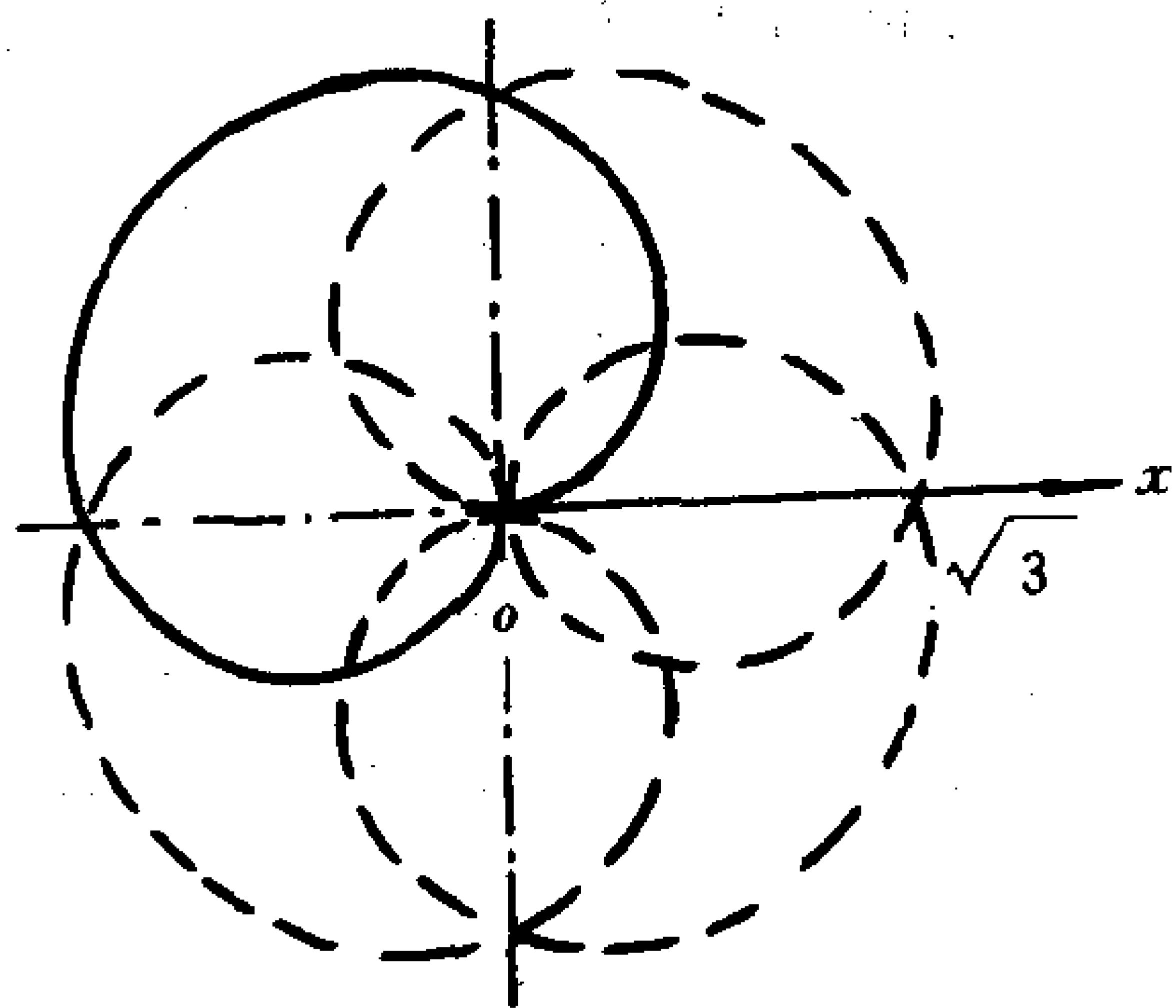


图 3—13

评注 在描点作图时还要注意不要将函数的周期当作曲线的周期，如例 8. 若将 $\sin\frac{2\theta}{3}$的周期 3π 当作曲线的周期，把 $\theta\in[3\pi,6\pi]$的图象看作是 $\theta\in[0,$

3π〕的图象的重复，则得到如图 3－14 的曲线.

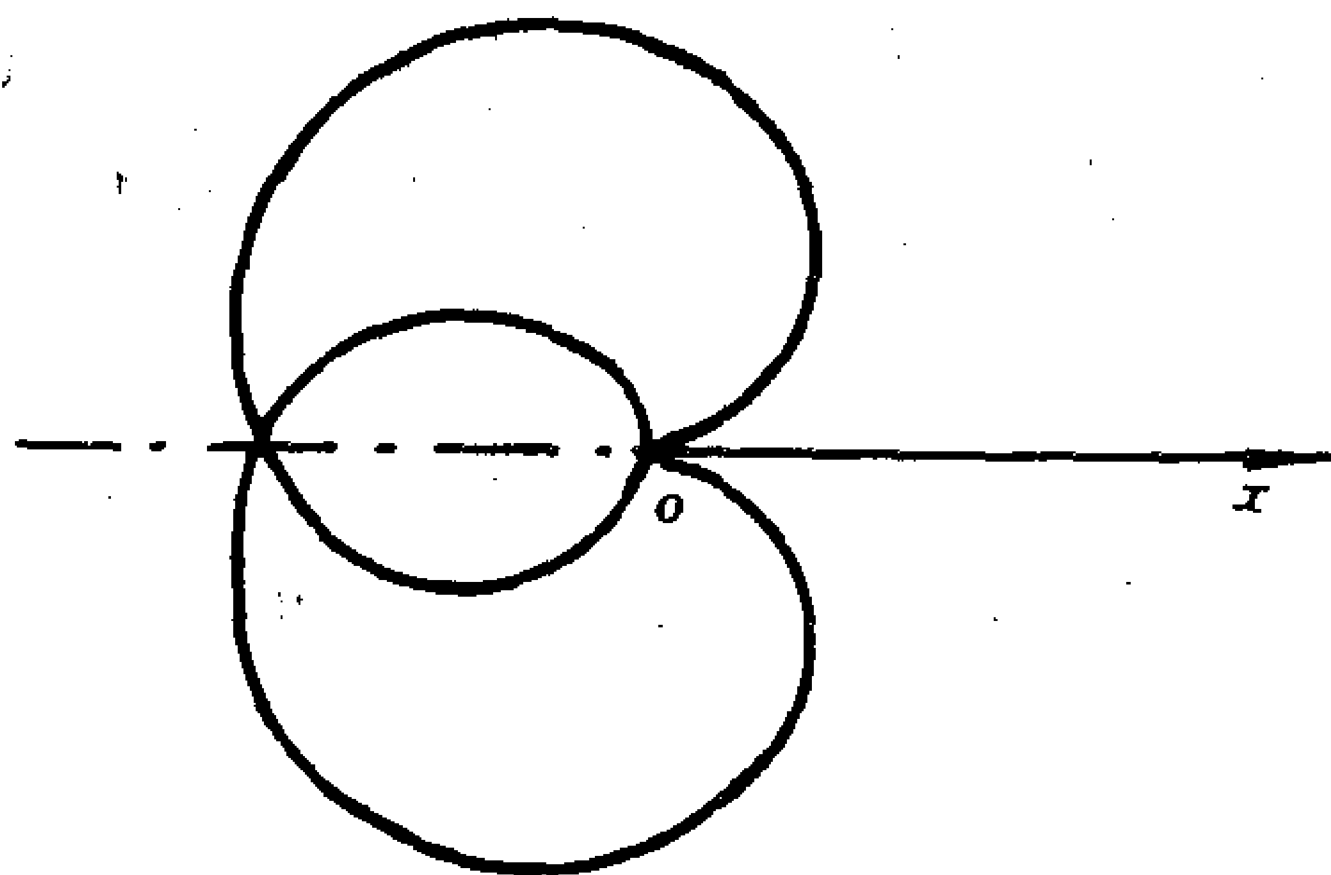


图 3－14

例 9 作 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ 图象.

解 显然曲线关于极轴、极垂线、极点都对称.

$\because \rho^2=a^2\cos 2\theta \leqslant a^2$

$\therefore |\rho| \leqslant |a|$，即 $\rho \in [-|a|, |a|]$

又 $\because \cos 2\theta=\dfrac{\rho^2}{a^2} \geqslant 0$

$\therefore 2k\pi-\dfrac{\pi}{2} \leqslant 2\theta \leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $k\pi-\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{4} \ (k \in Z)$

故曲线在 $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$、$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 两射线之间和 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$、$\theta=\dfrac{5\pi}{4}$ 两射线之间，由对称性可先在 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 内设值计算：

θ	0	$\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$
ρ	$\pm a$	± 0.93	$\pm 0.7a$	0

其余各点由对称性可得，这种曲线称为双纽线，见图 3－15.

例 10 作 $\rho=a(1+\mathrm{tg}\theta)\ (a \geqslant 0)$ 的图象.

解 以 $(\rho, \pi+\theta)$ 代 (ρ, θ)，方程不变，故曲线关于极点对称.

由于 θ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\mathrm{tg}\theta$ 趋于 ∞，故 ρ 也趋于 ∞，因而曲线可伸至无穷远.

令 $\rho=0$，则 $\rho=\frac{3\pi}{4}$，此时曲线过极点；令 $\theta=0$，则 $\rho=a$，得极轴上一交点 $(a,0)$；令 $\theta=\pi$，则 $\rho=a$，得另一交点 (a,π)；令 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$，则 ρ 不存在，故与极垂线无交点.

图 3—15

由对称性可先作出 $[0,\pi]$ 内的图象，设值列表计算：

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	a	$1.6a$	$2a$	$2.7a$	∞	$-0.7a$	0	$0.4a$	a

由此可描出图中实线部分，再由对称性即得全图，见图 3—16.

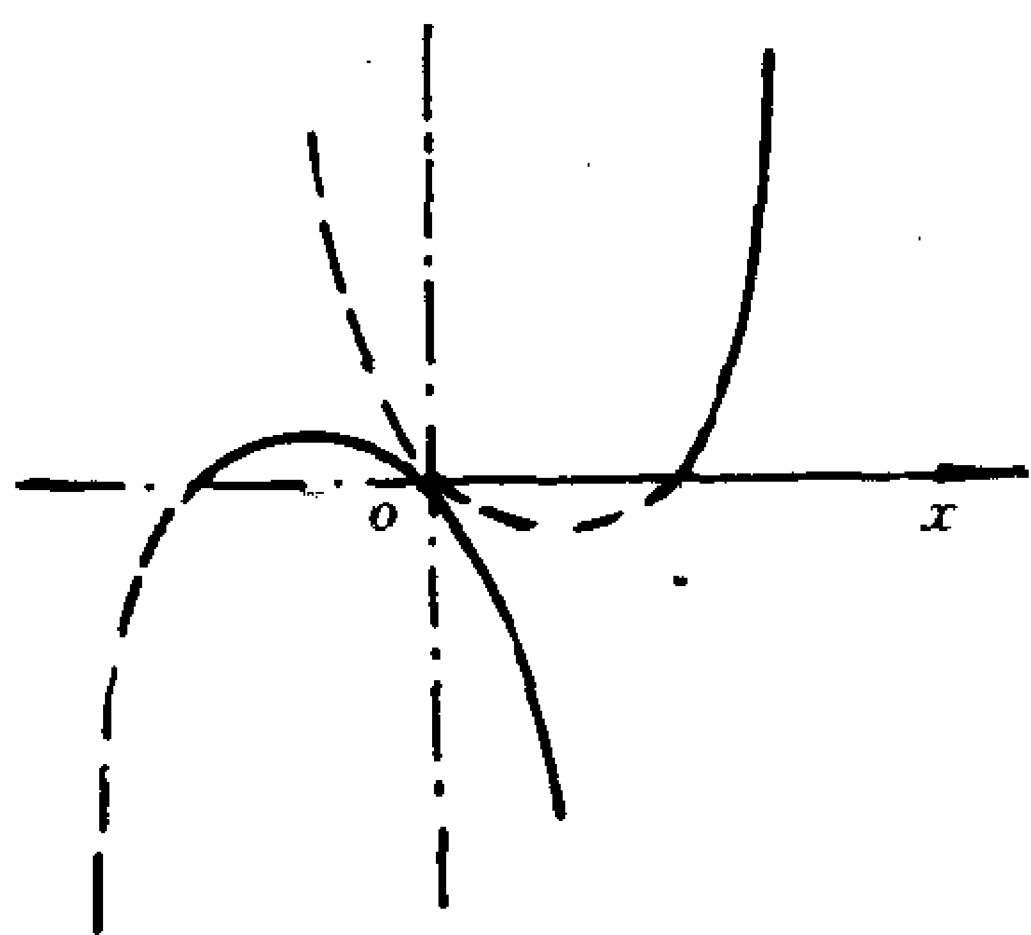


图 3—16

例 11 作 $\rho=a\cos\theta+b$ 的图形.

解 可令 $\rho_1=a\cos\theta$，$\rho_2=b$，则 $\rho=\rho_1+\rho_2$，但因方程 $\rho_1=a\cos\theta$ 与 $\rho_2=b$ 分别表示以点 $A(\frac{a}{2},0)$ 为中心、$\frac{a}{2}$ 为半径和以极点为中心、b 为半径的圆 c_1 和 c_2，故 $\rho=\rho_1+\rho_2$ 的图形也就很容易描出了. 具体步骤为：

(1)作圆 c_1 和 c_2.

(2)过极点任作若干条射线(让其尽量散布均匀),找出各射线与圆周 c_1 与 c_2 的交点,则这些交点的极径即 ρ_1 和 ρ_2.

(3)在每条射线上,作极径为 $\rho=\rho_1+\rho_2$ 的点,再把这些点光滑地连接起来,即得所描的曲线图形(图 3－17). 此即所谓巴斯加蚶线,其中 $a=b$ 时,又称为心脏线.

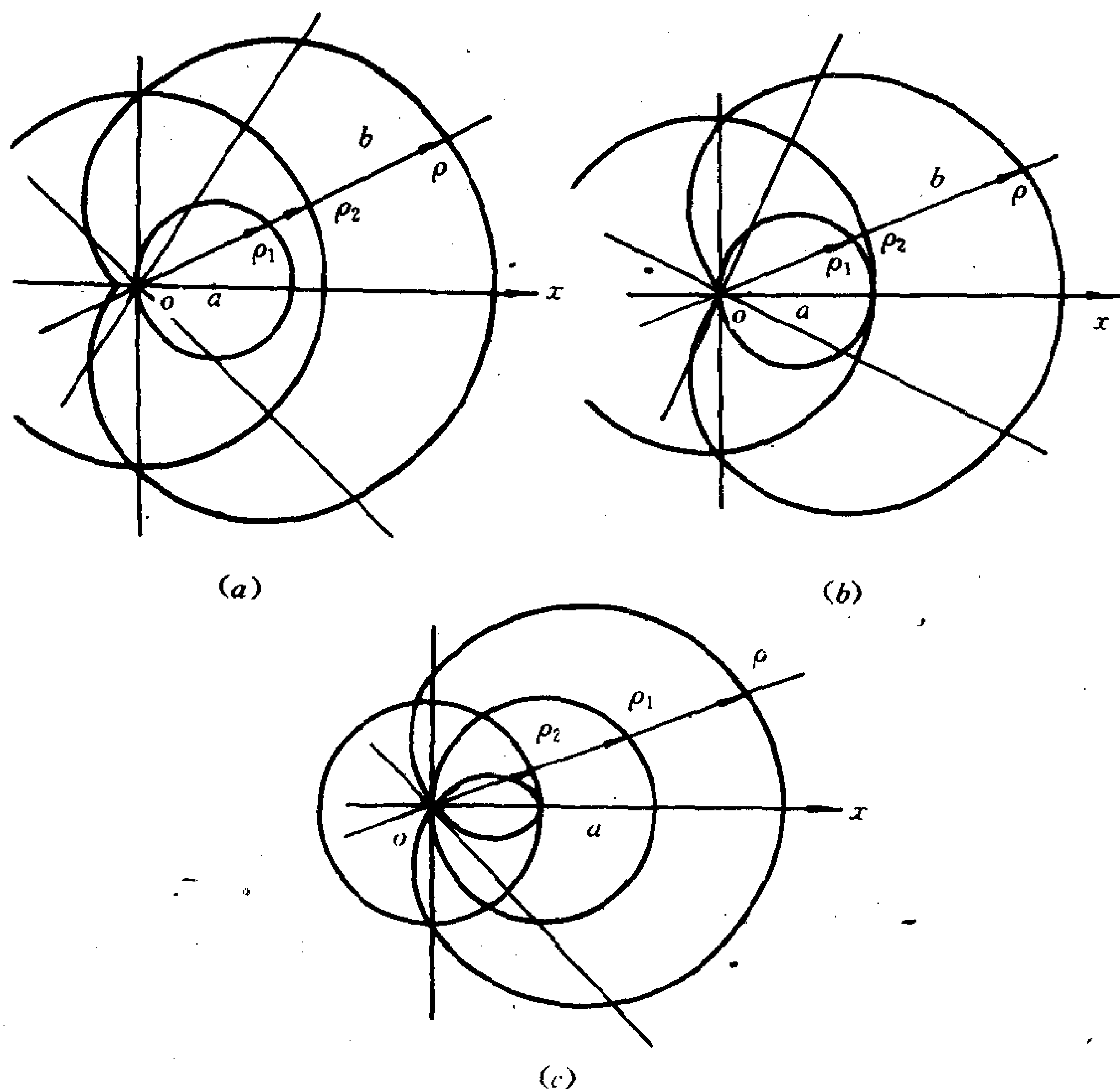


图 3－17

评注 本例是将 $\rho=a\cos\theta+b$ 分解为两个易作出的图 $\rho_1=a\cos\theta$, $\rho_2=b$,再由 $\rho=\rho_1+\rho_2$ 作出要求的曲线. 用类似的方法还可作曲线

$$\rho = a\sin\theta + \frac{b}{\cos(\theta + \pi)}$$

可令 $\rho_1 = a\sin\theta$，$\rho_2 = \frac{b}{\cos(\theta+\pi)} = \frac{-b}{\cos\theta}$，则 $\rho = \rho_1 + \rho_2$，由于前者表示圆周 C，后者表示直线 l，故由 $\rho = \rho_1 + \rho_2$ 可描出所要求的曲线，见图 3—18.

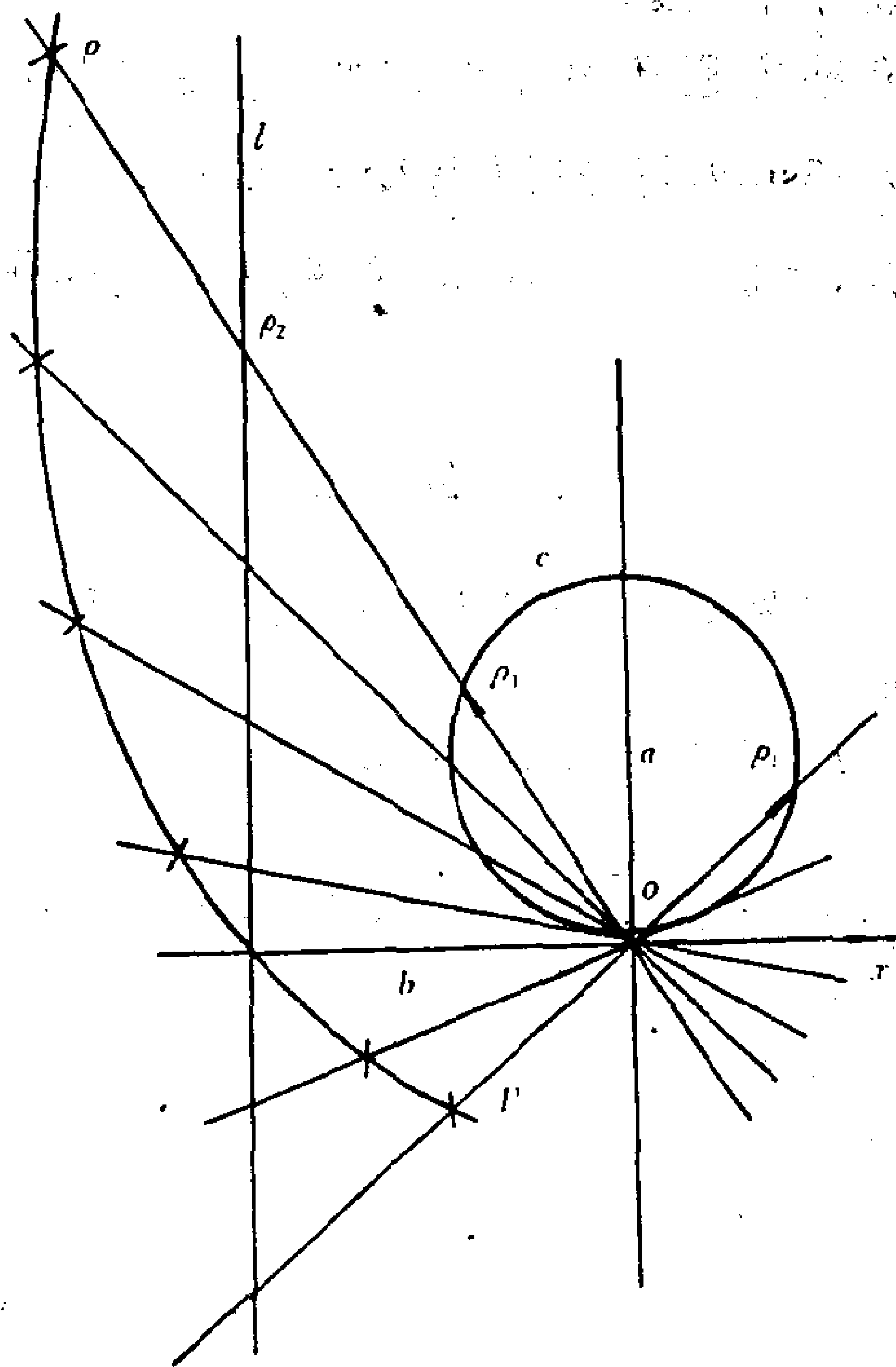


图 3—18

值得注意的是，上述 ρ_1、ρ_2 和 ρ 都是对应同一极角 θ 的极径，且 ρ 是 ρ_1 与 ρ_2 的代数和.

小结 为了能既准确又迅速地作出极坐标系下的曲线，一般可先对以下几方面进行讨论：

1° 曲线是否关于极轴、极垂线、极点对称；

2° ρ、θ 的取值范围；

3° 曲线是否过极点，与极轴、极垂线是否有交点；

4° 类似于 $\rho=a\sin n\theta$、$\rho=a\cos n\theta(n\in N)$ 的玫瑰曲线，可先确定瓣数，以免遗漏．以上两曲线，当 n 为偶数时有 $2n$ 瓣；当 n 为奇数时有 n 瓣；

5°对有些方程还可先经过变形、变换、分解．例如 $\rho=5\sqrt{3}\cos\theta-5\sin\theta$，可先将方程变形为 $\rho=10\cos(\theta+\frac{\pi}{6})$，再经过旋转变换，得圆 $\rho'=10\cos\theta'$，如例 11．这样作图就容易多了．

习 题 3.2

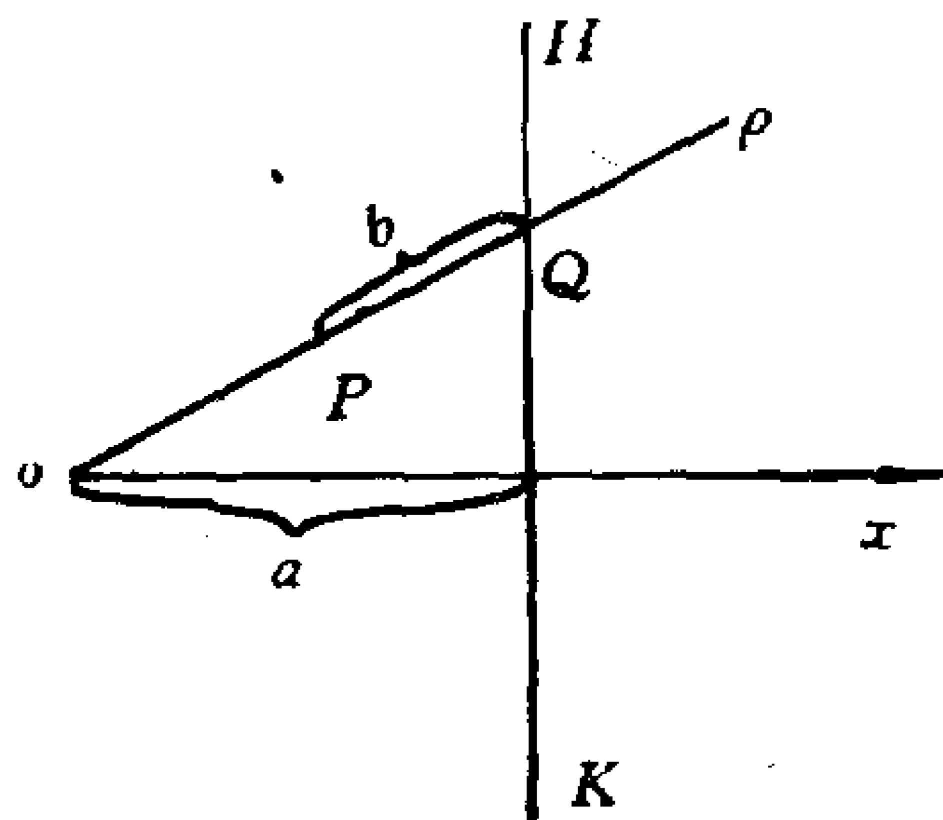
1. 已知 A、B 两点，自 A 作 AH 垂直于过 B 的任意直线，它的垂足为 H

(1)求 AH 中点的轨迹，并说明形状；

(2)于 AH 上取 P 点，使 $AH\cdot AP=k^2$(k 为非零常数)，求 P 点的轨迹，并说明形状．

2. 动三角形底边固定，顶角为 α(α 为非零常数)，求其顶点的轨迹．

3. 已知一定点 o 及一定直线 HK．定点到定直线的距离为 a，$a>0$，自 o 引射线交 HK 于 Q，在射线 oQ 上取点 P，使 $QP=b$，$b>0$，求 P 点的轨迹．



第 3 题图

4. 设圆 $x^2+y^2-2y=0$ 上有任一点 P，在 oP 上有一点 Q，与直线 $y=2$ 的距离 $d=PQ$，求 Q 的轨迹．

5. 已知定圆 o 的直径 $AB=2r$，BC 是过 B 的一条动弦，延长 BC 到 D，使 $CD=BC$，求 AC、oD 的交点 P 的轨迹方程．

6. 已知$\triangle ABC$ 的顶点 A 不动，BC 在一条直线上滑动，但 BC 的长

不变，求此动三角形外心的轨迹.

7. 求基圆半径为 r 的渐开线的极坐标参数方程.

8. 一定角$\angle AoB$ 内有一动点 P，引 $PA\perp oA$，$PB\perp oB$，使四边形 $AoBP$ 的面积为定值，求动点 P 的轨迹方程.

9. 试求下列图形：

(1) $\rho=a\sin2\theta\quad(a>0)$；　　(2) $\rho=\cos3\theta$；

(3) $\rho=a\mathrm{tg}\theta\quad(a>0)$；　　(4) $\rho=\cos\dfrac{\theta}{2}$.

10. 作 $\rho=\dfrac{4}{2-\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}$ 的图象.

§3.3　常见曲线的极坐标方程

一、主要内容

1. 直线与圆

过极点的直线 $\theta=\alpha$	圆心在极点的圆 $\rho=r$
直线的法线式 $\rho\cos(\theta-\alpha)=P$	过极点的圆 $\rho=2r\cos(\theta-\alpha)$
过 A、B 两点的直线 $\dfrac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\rho}=\dfrac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\rho_1}+\dfrac{\sin(\theta-\theta_1)}{\rho_2}$	圆的一般式 $\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)+a^2=r^2$

2. 圆锥曲线

根据统一定义："与一个定点(焦点)的距离和一条定直线(准线)的距离的比等于常数 e 的点的轨迹，当 $0<e<1$ 时是椭圆；当 $e>1$ 时是双曲线；当 $e=1$ 时是抛物线."推导出在极坐标系下圆锥曲线的统一方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$$

当方程表示椭圆时，定点 F 是它的左焦点，定直线 l 是它的左准线. 当方程表示抛物线时，开口向右. 当方程表示双曲线时，若 ρ 和 θ 有如下限制：$0\leqslant\theta<2\pi$，$\rho\geqslant0$，这时只表示双曲线右支. 定点 F 是双曲线的右焦点，定直线 l 是其右准线. 如果允许 $\rho<0$，方程就表示整个双曲线.

3. 等速螺线

从点 o 出发的射线 l，绕点 o 作等角速度的转动，同时点 M 沿 l 作等直线运动时，点 M 的轨迹为等速螺线，其方程为

$$\rho=\rho_0+a\theta$$

4. 极坐标与反演

在极坐标系中，对任何曲线 C 的极方程 $\rho=f(\theta)$，若取极径的倒数

$$\rho'=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{f(\theta)}=f'(\theta)$$

则又得到另一曲线 C' 的极方程 $\rho'=f'(\theta)$. 因为 C 与 C' 相应于同一极角 θ 的极径恒有

$$\rho'\cdot\rho=1$$

故它们是关于以极点为中心的单位圆互为反演的曲线，基于这种关系，可以用于揭示一些曲线之间的内在联系. 为此，给出一个所谓反演和的概念：

定义：设有曲线 $C_1:\rho_1=f_1(\theta)$，$C_2:\rho_2=f_2(\theta)$，它们关于单位圆 $r=1$ 的反演曲线为 $C'_1:\rho'_1=\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{f_1(\theta)}$，$C'_2:\rho'_2=\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{f_2(\theta)}$，称由极方程

$$\rho'=\rho'_1+\rho'_2=\frac{1}{f_1(\theta)}+\frac{1}{f_2(\theta)}$$

确定的曲线 C' 为曲线 C_1、C_2 的反演代数和（曲线），简称反演和（曲线）. 这里所谓代数和，意即 ρ' 是 ρ'_1 与 ρ'_2 关于同一极角 θ 的代数和.

二、应用举例

1. 含字母系数方程的讨论

例 1 求证：当 A、B 不全为零时，方程 $\rho=A\sin\theta+B\cos\theta$ 表示圆.

证明 若 A、B 中有一为零，不妨设 $B=0$，则有 $\rho=A\sin\theta$，将其变形为 $\rho=2\cdot\frac{A}{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{2})$，显然是以 $(\frac{A}{2},\frac{\pi}{2})$ 为圆心，$\frac{|A|}{2}$ 为半径的圆.

若 A、B 都不为零，则有 $\rho=A\sin\theta+B\cos\theta=\sqrt{A^2+B^2}\sin(\theta+\alpha)$（其中 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{B}{A}$），将其变形为 $\rho=2\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2}\cos[\theta-(\frac{\pi}{2}-\alpha)]$，可知是以 $(\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2},\frac{\pi}{2}-\alpha)$ 为圆心，$\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2}$ 为半径的圆.

所以，方程 $\rho=A\sin\theta+B\cos\theta$（$A$、$B$ 不全为零）表示圆.

评注 方程的每一项关于 ρ、$\sin\theta$、$\cos\theta$ 的次数都是相同的，这样的方程叫做关于 ρ、$\sin\theta$、$\cos\theta$ 的齐次方程. 由例 1 知，关于 ρ、$\sin\theta$、$\cos\theta$ 的齐一次方程 $\rho=A\sin\theta+B\cos\theta$（$AB\neq$

0)表示的曲线为圆. 还可推广到关于 ρ、$\sin\theta$、$\cos\theta$ 的齐二次方程 $\rho^2=A\sin^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta$，当 $ABC\neq0$，且 $B^2-4AC=0$ 时也表示圆，这里只要将 $\rho^2=A\sin^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta$ 变形为 $\rho^2=A(\sin\theta+\frac{B}{2A}\cos\theta)^2$，即可由例 1 的结论推得.

例 2 讨论方程 $\rho^n=a^n\cos n\theta$（$a>0$，$n=\pm\frac{1}{2}$，±1，±2）的曲线.

解 当 $n=\frac{1}{2}$ 时，方程为 $\rho=\frac{a}{2}(1+\cos\theta)$，此曲线为心脏线；

当 $n=-\frac{1}{2}$ 时，方程为 $\rho=\frac{2a}{1+\cos\theta}$，此曲线为圆；

当 $n=1$ 时，方程为 $\rho=a\cos\theta$，此曲线为圆；

当 $n=-1$ 时，方程为 $\rho\cos\theta=a$，此曲线为一条直线；

当 $n=2$ 时，方程为 $\rho^2=a^2\cos2\theta$，此曲线为双纽线；

当 $n=-2$ 时，方程为 $\rho^2\cos2\theta=a^2$，此曲线为等轴双曲线.

例 3 就 m 取值的变化，讨论极坐标方程 $2m\rho\cos^2\theta-3\rho\cos2\theta+3(\rho-4\cos\theta)=0$ 所表示的曲线.

解 当 $m=0$ 时，方程为 $\rho\cos2\theta+4\cos\theta-\rho=0$

因为曲线过极点，所以方程两边同乘以 ρ，得 $\rho^2\cos2\theta+4\rho\cos\theta-\rho^2=0$. 转化成直角坐标方程为

$$y^2=2x$$

即方程表示的曲线为抛物线.

当 $m\neq0$ 时，其直角坐标方程为

$$3y^2+m(x-\frac{3}{m})^2=\frac{9}{m}$$

当 $m<0$ 时，是双曲线；当 $m>0$ 且 $m\neq3$ 时，是椭圆；当 $m=3$ 时，是圆.

评注 极坐标系下含字母方程的讨论，要注意分类的完整性，防止遗漏．对于极坐标系下的方程，若不熟悉其曲线的形状，可通过转化成直角坐标系下的方程来判断．

2．有关圆锥曲线 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 的讨论

例 4 见图 3－19、3－20，讨论双曲线 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}(e>1)$ 左、右支的 θ 及 ρ 的取值范围．

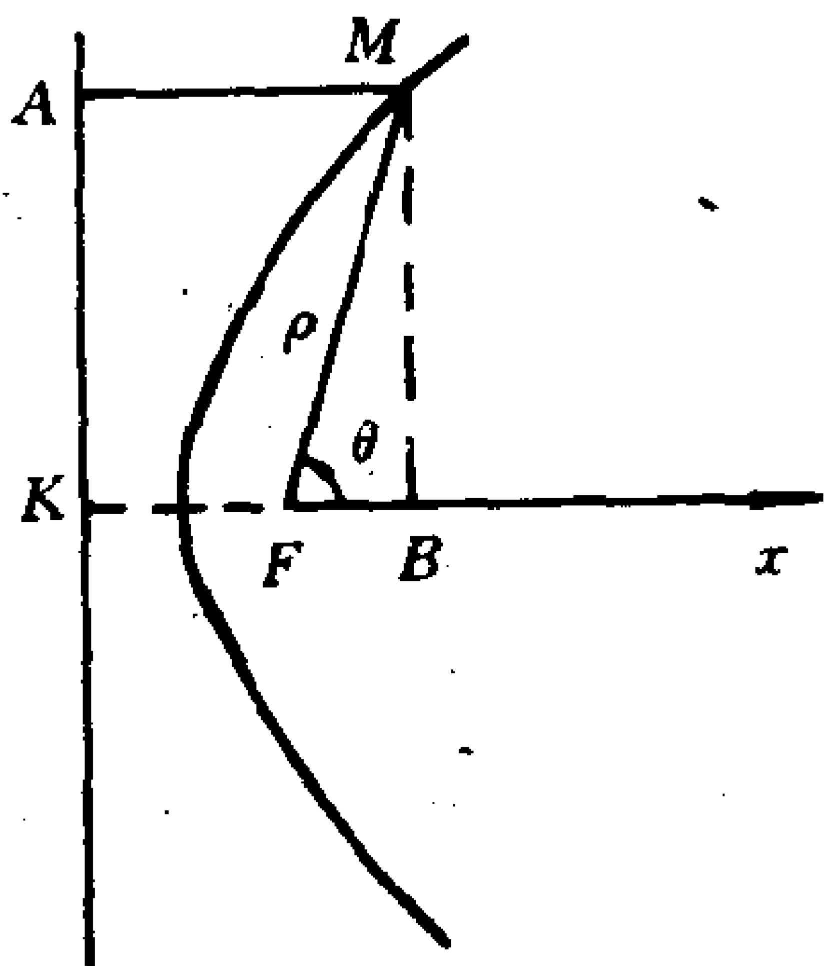


图 3－19

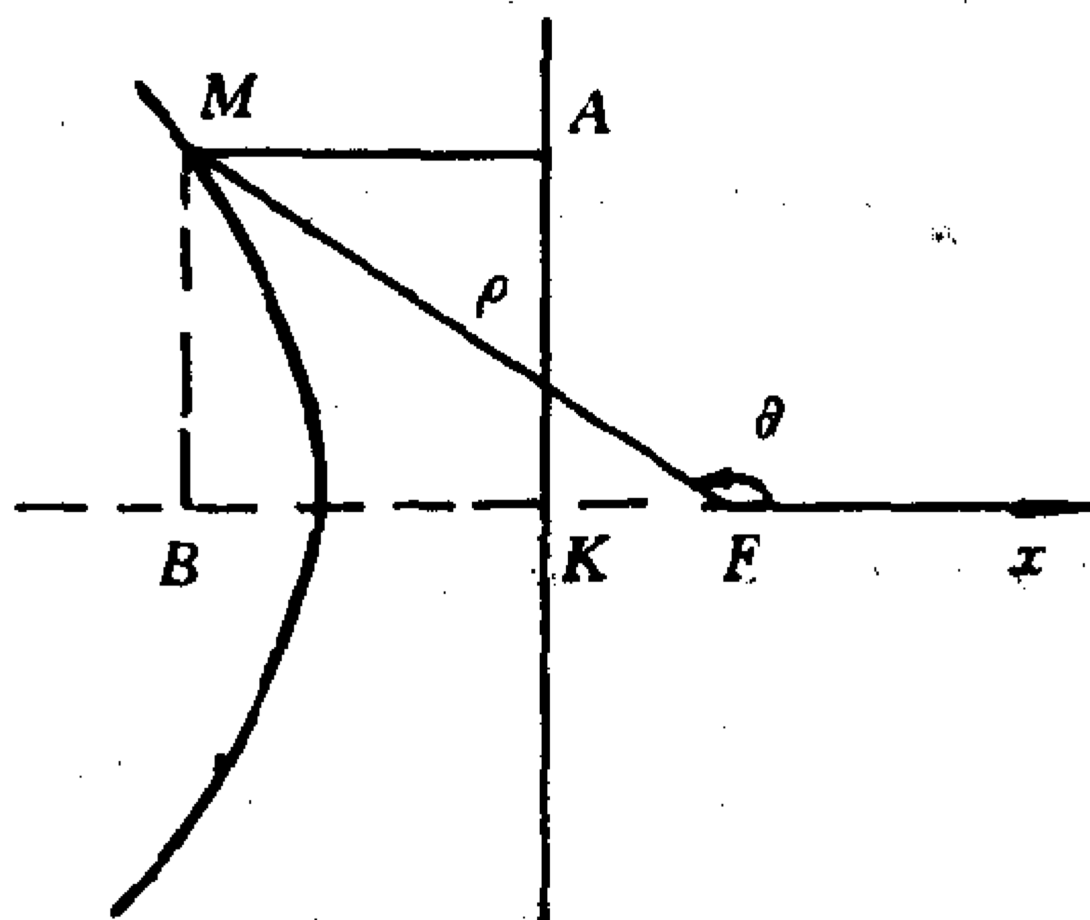


图 3－20

解 当 $\rho>0$ 时，双曲线右支方程可如下建立：

$$M=\left\{M \mid \frac{|MF|}{|MA|}=e, e>1\right\}$$

其中 $|MF|=\rho$，$|MA|=|BK|=p+\rho\cos\theta$，则

$$\frac{\rho}{p+\rho\cos\theta}=e, \text{即 } \rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$$

$$\because 1-e\cos\theta>0, \cos\theta<\frac{1}{e}$$

$$\therefore 2k\pi+\arccos\frac{1}{e}<\theta<2(k+1)\pi-\arccos\frac{1}{e}\ (k\in Z)$$

当 $\rho>0$ 时，双曲线左支方程可如下建立：

$$M=\left\{M\mid \frac{|MF|}{|MA|}=e, e>1\right\}$$

其中 $|MF|=\rho$,

$$|MA|=|BK|=|BF|-|KF|=-\rho\cos\theta-p,$$

得
$$\rho=\frac{-ep}{1+e\cos\theta}$$

此时，$\because\ 1+e\cos\theta<0, \cos\theta<-\frac{1}{e}$

$$\therefore\ (2k+1)\pi-\arccos\frac{1}{e}<\theta<(2k+1)\pi+\arccos\frac{1}{e}\ (k\in Z)$$

若令 $\varphi=\theta-\pi$， 即得

$$\rho=\frac{-ep}{1-e\cos\varphi}\ \left(2k\pi-\arccos\frac{1}{e}<\varphi<2k\pi+\arccos\frac{1}{e}\right)\quad (k\in Z)$$

综上所述，方程 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}(e>1)$，当 $\rho>0, \theta\in\left(2k\pi+\arccos\frac{1}{e}, 2k\pi+2\pi-\arccos\frac{1}{e}\right)$ 时，表示双曲线的右支图象；当 $\rho<0, \theta\in\left(2k\pi-\arccos\frac{1}{e}, 2k\pi+\arccos\frac{1}{e}\right)$ 时，表示双曲线的左支图象，k 为整数.

评注 以上解题过程还得到这样一个结论，双曲线的渐近线倾角为 $\arccos\left(\pm\frac{1}{e}\right)$. 在求作双曲线的图形时，由于曲线关于极轴对称，所以可将列表计算的 θ 范围取为 $\left[0, \arccos\frac{1}{e}\right)$，$\left(\arccos\frac{1}{e}, \pi\right]$

例 5 求过圆锥曲线 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 上的一点 $P(\rho_0,\theta_0)$ 的切线的极坐标方程.

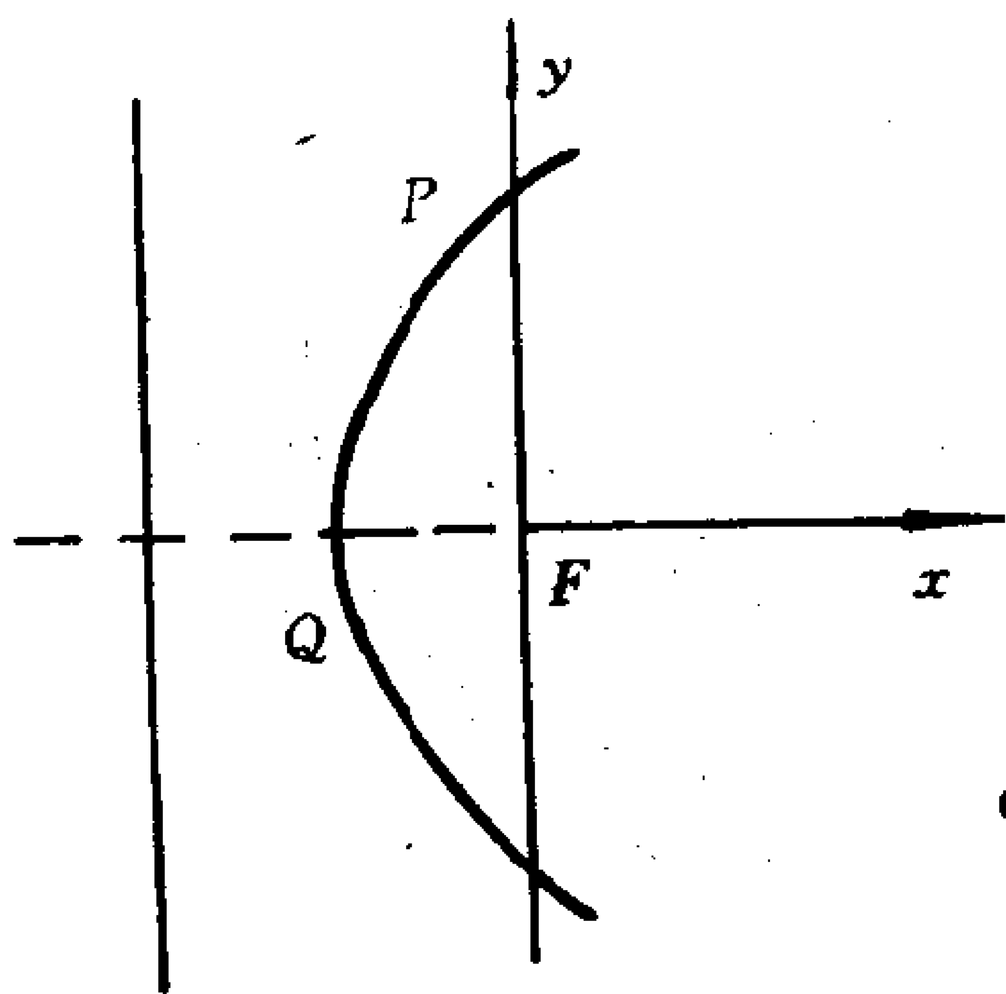


图 3-21

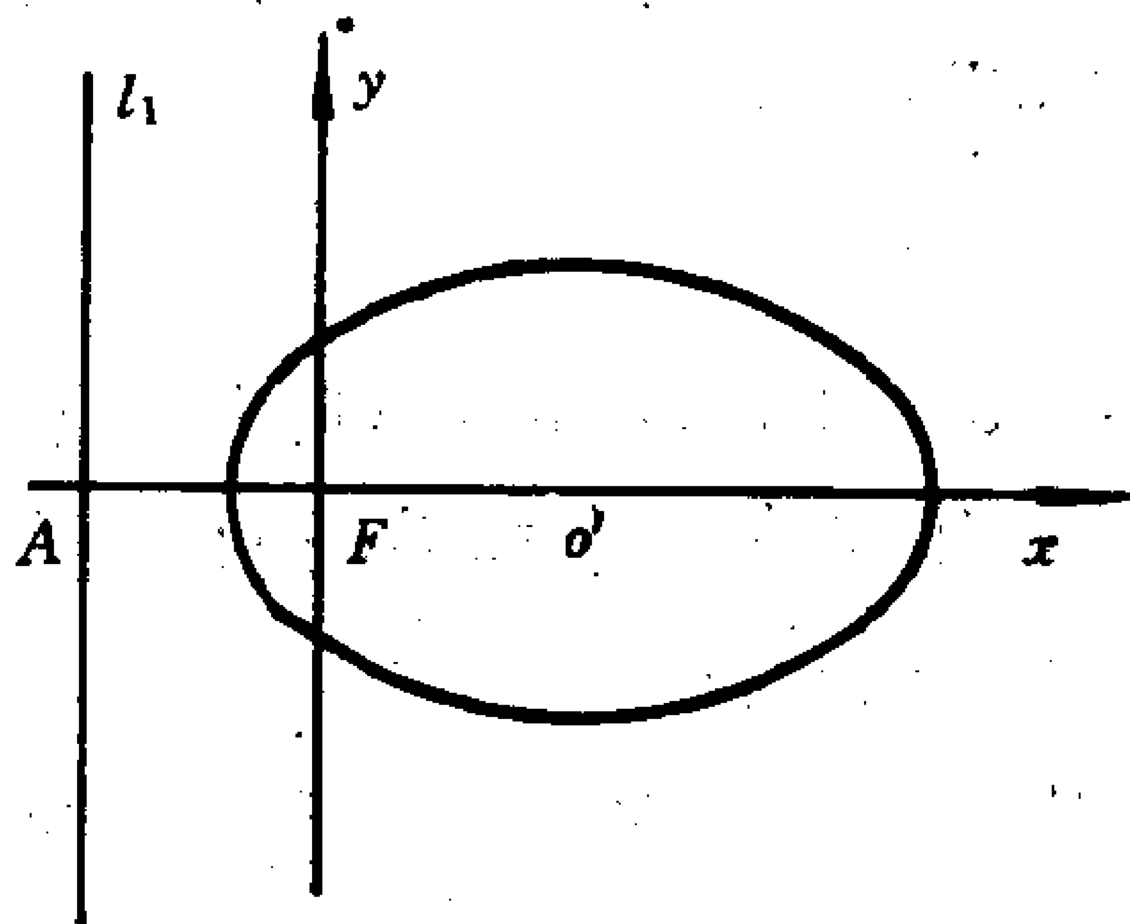


图 3-22

解 设 $Q(\rho_1,\theta_1)$ 为曲线上异于 P 的一点，直线 PQ 的方程为

$$\frac{\sin(\theta_0-\theta_1)}{\rho}=\frac{\sin(\theta_0-\theta)}{\rho_1}+\frac{\sin(\theta-\theta_1)}{\rho_0}$$

而
$$\rho_0=\frac{ep}{1-e\cos\theta_0},\rho_1=\frac{ep}{1-e\cos\theta_1}$$

代入直线 PQ 的方程，得

$$\frac{\sin(\theta_0-\theta_1)}{\rho}=\frac{(1-e\cos\theta_1)\sin(\theta_0-\theta)}{ep}$$
$$+\frac{(1-e\cos\theta_0)\sin(\theta-\theta_1)}{ep}$$

经化简整理得

$$\rho=\frac{ep\cos\frac{\theta_0-\theta_1}{2}}{\cos(\theta-\frac{\theta_0+\theta_1}{2})-e\cos\frac{\theta_0-\theta_1}{2}\cos\theta}$$

当点 Q 在曲线上运动并无限接近点 P 时，$Q_1\to Q_0$，这时

上式变为

$$\rho=\frac{ep}{\cos(\theta-\theta_0)-e\cos\theta}$$

例 6 求椭圆 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}(0<e<1)$ 在直角坐标系下的标准方程.

解 对于 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}(0<e<1)$ 在极坐标系下的图象如图 3－22，若取极点（此外为左焦点）F 为坐标原点，极轴为 X 轴，建立直角坐标系，记椭圆的长半轴、短半轴及半焦距分别为 a、b、c，且 $a>0, b>0, c>0, a>b, a>c$. 设椭圆的中心为 o'，则 o' 的坐标为 $(c,0)$，故在直角坐标系处的椭圆标准方程类型为 $\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

如图∵ $|AF|=p, |Ao'|=\frac{a^2}{c}$，而 $|Ao'|=p+c$，故有

$$\frac{a^2}{c}=p+c$$

$$\therefore \quad p=\frac{b^2}{c} \tag{1}$$

$$又\ e=\frac{c}{a} \tag{2}$$

$$a^2=b^2+c^2 \tag{3}$$

由式(1)、(2)、(3) 组成方程组，解得 $a^2=\frac{e^2p^2}{(1-e)^2}$，

$b^2=\frac{e^2p^2}{1-e^2}, c=\frac{e^2p}{1-e^2}$. 代入 $\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，

即得椭圆 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}(0<e<1)$

在直角坐标系下的标准方程为

$$\frac{\left(x-\dfrac{e^2p}{1-e^2}\right)^2}{\left(\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}}=1$$

评注 由于 a、b、c 关于 e、p 的表达式与椭圆相对坐标的位置无关，所以对于极坐标系下的椭圆方程化为直角坐标系下的标准方程可归纳为下表（表中的互化是在坐标系具有如例 6 这样的关系下进行的）：

极坐标方程	直角坐标方程
$\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}(0<e<1)$	$\dfrac{(x-c)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a^2=b^2+c^2)$
$\rho=\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}(0<e<1)$	$\dfrac{(x+c)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a^2=b^2+c^2)$
$\rho=\dfrac{ep}{1-e\sin\theta}(0<e<1)$	$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{(y-c^2)^2}{a^2}=1(a^2=b^2+c^2)$
$\rho=\dfrac{ep}{1-e\sin\theta}(0<e<1)$	$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{(y^2+c^2)^2}{a^2}=1(a^2=b^2+c^2)$
其中，$a^2=\dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$；$b^2=\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}$；$c=\dfrac{e^2p}{1-e^2}$	

同理，对抛物线、双曲线也可归纳成下表：

极坐标方程	直角坐标方程
$\rho=\dfrac{p}{1-\cos\theta}$	$y^2=2p(x+\dfrac{p}{2})$
$\rho=\dfrac{p}{1+\cos\theta}$	$y^2=-2p(x-\dfrac{p}{2})$
$\rho=\dfrac{p}{1-\sin\theta}$	$x^2=2p(y+\dfrac{p}{2})$
$\rho=\dfrac{p}{1+\sin\theta}$	$x^2=-2p(y-\dfrac{p}{2})$

（续　表）

$\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}(e>1)$	$\dfrac{(x+c)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(c^2=a^2+b^2)$
$\rho=\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}(e>1)$	$\dfrac{(x-c)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(c^2=a^2+b^2)$
$\rho=\dfrac{ep}{1-e\sin\theta}(e>1)$	$\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{(y+c^2)^2}{a^2}=1(c^2=a^2+b^2)$
$\rho=\dfrac{ep}{1+e\sin\theta}(e>1)$	$\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{(y-c^2)^2}{a^2}=1(c^2=a^2+b^2)$
其中，$a^2=\dfrac{e^2p^2}{(e^2-1)^2}$；$b^2=\dfrac{e^2p^2}{e^2-1}$；$c=\dfrac{e^2p}{e^2-1}$	

3. 有关等速螺线的讨论

等速螺线又称阿基米德螺线，方程 $\rho=\rho_0+a\theta$ 的曲线如图 3－23，当 $\theta=0$ 时，$\rho=\rho_0$；当 θ 增大时，ρ 按比例增大，直线 l 每转过角度 2π 就回到原位，但这时 M 已向前移动了一段距离 $2a\pi$，故曲线呈螺旋状．在机械装置中，若把凸轮的边缘作成等速螺线形，可以将等速转动化成等速直线运动．

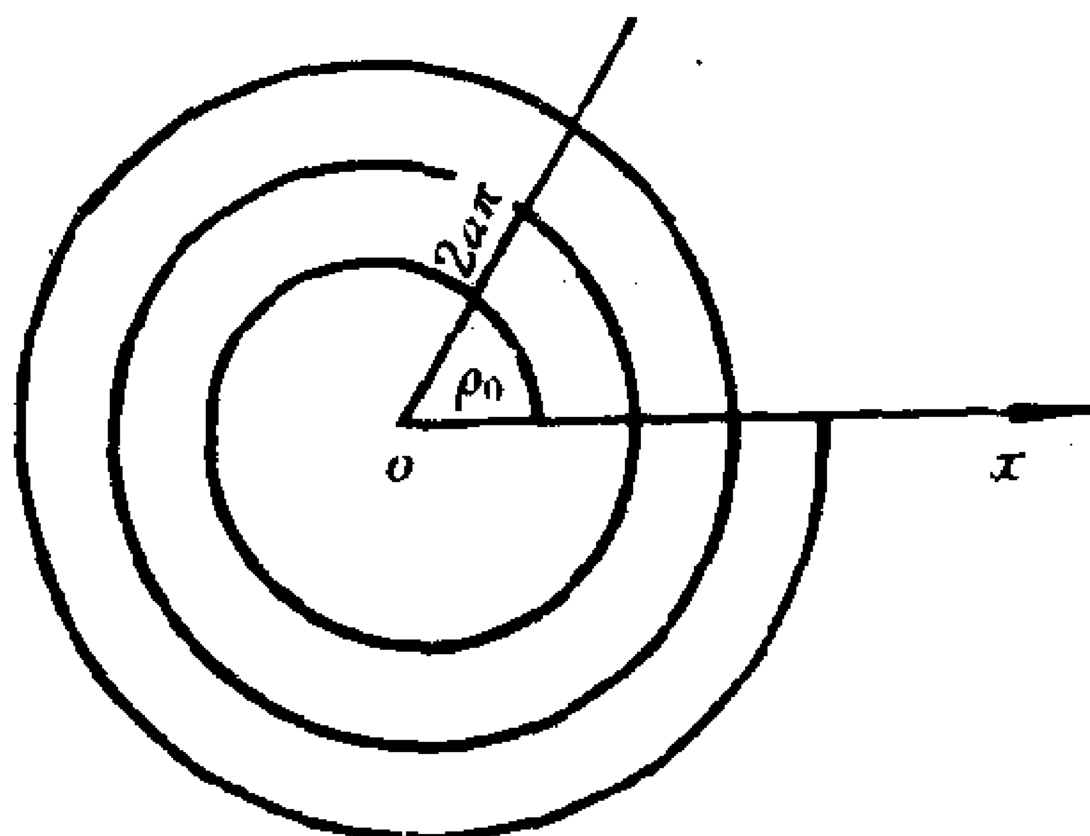


图 3－23

例 7　等速螺线共有三圈，螺线上距中心的最近距离为 20cm，最远距离为 35cm，求螺线的方程．

解　如图 3－23，取中心为极点，以中心与螺线上距中心最近点的连线为极轴，建立坐标系．

设等速螺线方程为 $\rho=\rho_0+a\theta$，等速螺线按逆时针旋转．由已知 $\rho_0=20$，当 $\theta=6\pi$ 时，$\rho=35$，即 $35=20+a\cdot 6\pi$，解得 a

$=\frac{5}{2\pi}$. 得等速螺线方程为 $\rho=20+\frac{5}{2\pi}\theta(0\leqslant\theta\leqslant 6\pi)$.

例 8 已知凸轮的轮廓线方程是

$$\rho=\begin{cases}100+\frac{144}{\pi}\theta & (0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4})\\ 136 & (\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4})\\ 136-\frac{144}{\pi}\theta & (5\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2})\\ 100 & (\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi)\end{cases}$$

讨论当凸轮按顺时针方向转动一圈时从动杆的运动规律.

解 从方程可知,当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时,因为 $\frac{144}{\pi}>0$,所以当凸轮转动时,从动杆应等速推进.

当 $\frac{5\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时,因为 $-\frac{144}{\pi}<0$,所以当凸轮转动时,从动杆应等速退回.

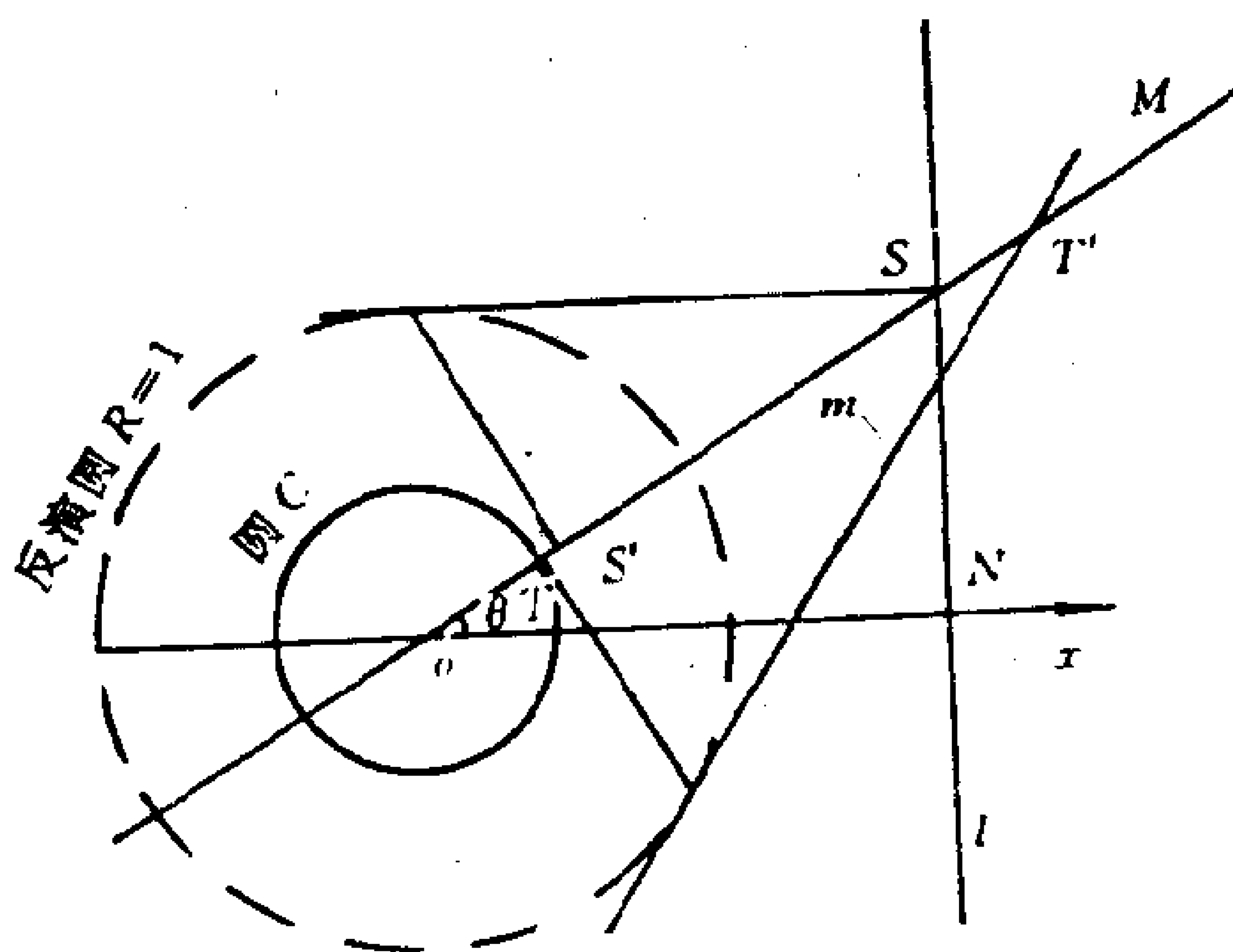


图 3-24

当 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}$ 和 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ 时,凸轮轮廓线为圆. 这时从动杆不随凸轮的转动而运动.

综上所述,从动杆的运动规律为等速推进—不动—等速

退回—不动.

4. 用反演研究曲线

根据极坐标概念和极坐标方程的特点，联系反演，可以揭示出这种曲线与那种曲线之间的内在联系．下面主要揭示直线、圆；巴斯卡蚶线；圆锥曲线之间的内在联系.

例 9 设给定直线 l，点 $o \in l$ 和圆 $C(o,R)$，则 l 和 C 关于单位圆(0,1)的反演曲线之和为巴斯加蚶线，且当 l 与圆 C 相离、相切和相割时，分别求图中所示的三种巴斯卡蚶线.

证明 以点 o 为极点，o 到直线 l 的垂直线为极轴建立极坐标系(图 3－24). 令 $|oN|=p$，则 l 与 C 的极坐标方程为：

$$l:\rho = oS = \frac{p}{\cos\theta} \quad C:\rho = R$$

其反演曲线极坐标方程为：

$$l':\gamma_1 = \frac{1}{\rho} = \frac{\cos\theta}{p}$$

$$C':\gamma_2 = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}$$

则 l 与 C 反演和曲线 $D=l'+C'$ 的极方程为

$$D:\gamma = oM = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\cos\theta}{p} + \frac{1}{R}$$

令 $\qquad a = \frac{1}{p}, b = \frac{1}{R} \qquad$ 则

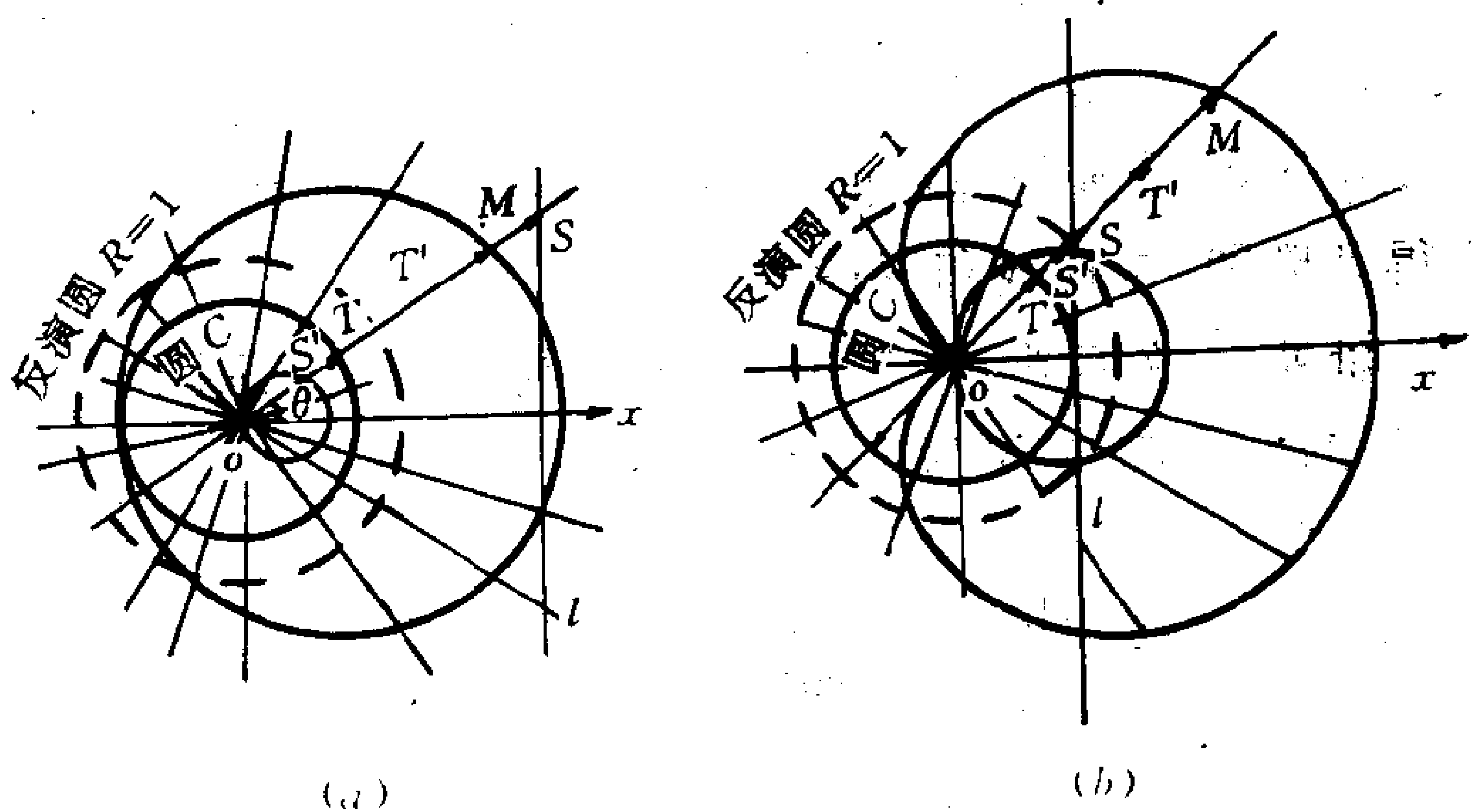
$$D:\gamma = a\cos\theta + b$$

显然，这是巴斯加蚶线，且因

$$R < p \Rightarrow a < b$$

$$R = p \Rightarrow a = b$$

$$R > p \Rightarrow a > b$$



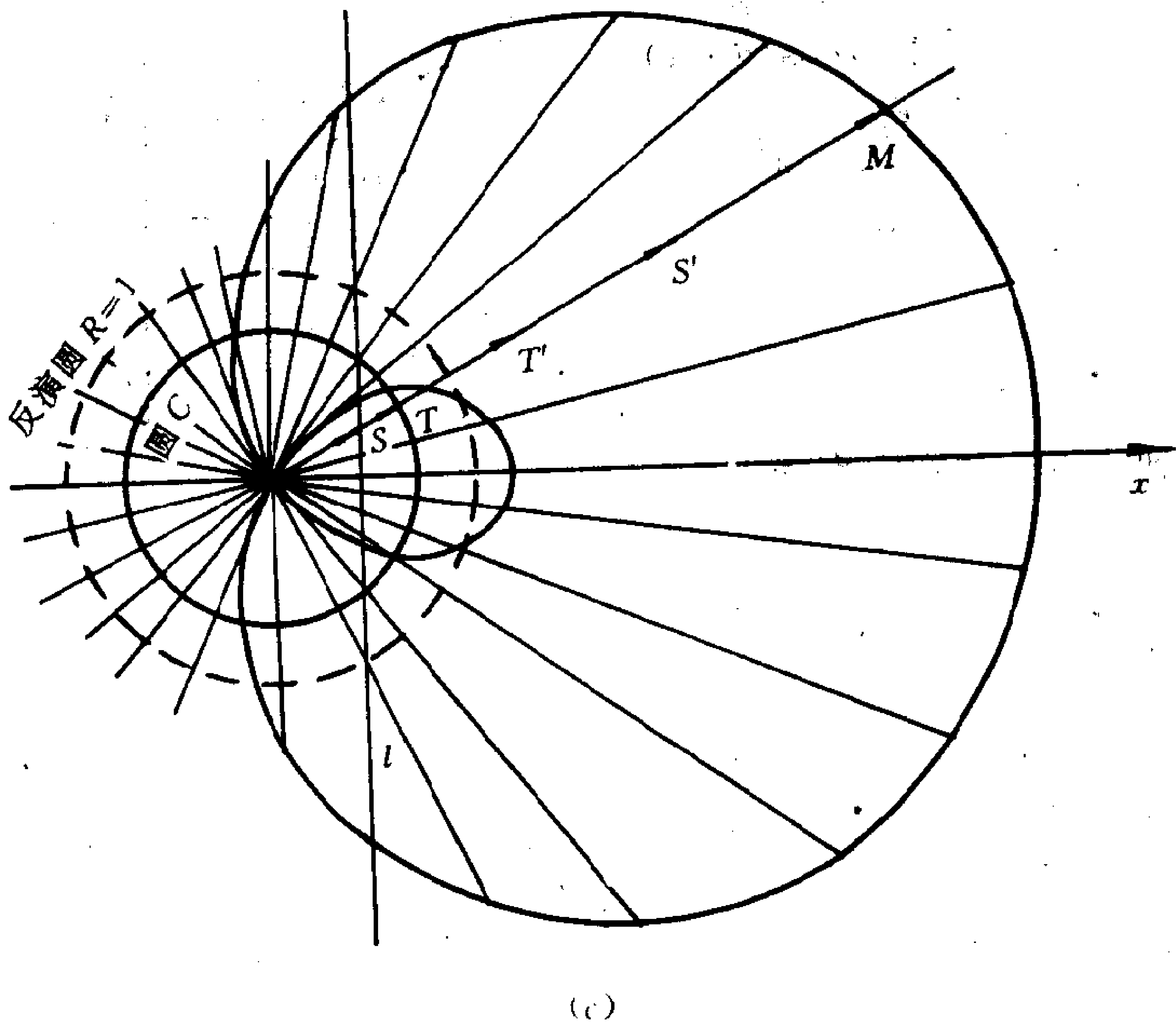


图 3—25

故曲线 D 在 l 与 C 相离、相切和相割时，分别得到图中

所示的三种巴斯加蚶线(如图 3—25 所示).

例 10 巴斯加蚶线 $B:\gamma=a\cos\theta+b$ 关于以极点 o 为中心的单位圆的反演是圆锥曲线,且当 $a<b$、$a=b$ 和 $a>b$ 时,分别得到椭圆、抛物线和双曲线.

证明 考虑到 $b>0$($b<0$ 时可类似证明),则 B 关于圆$(0,1)$的反演曲线 B' 为

$$\rho=\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{a\cos\theta+b}=\frac{\frac{1}{b}}{1+\frac{a}{b}\cos\theta}$$

$$=\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{a}}{1-e\cos(\theta+\pi)}$$

$$=\frac{ep}{1-e\cos(\theta+\pi)}$$

其中 $e=\frac{a}{b}$,$p=\frac{1}{a}$ 都是常数.

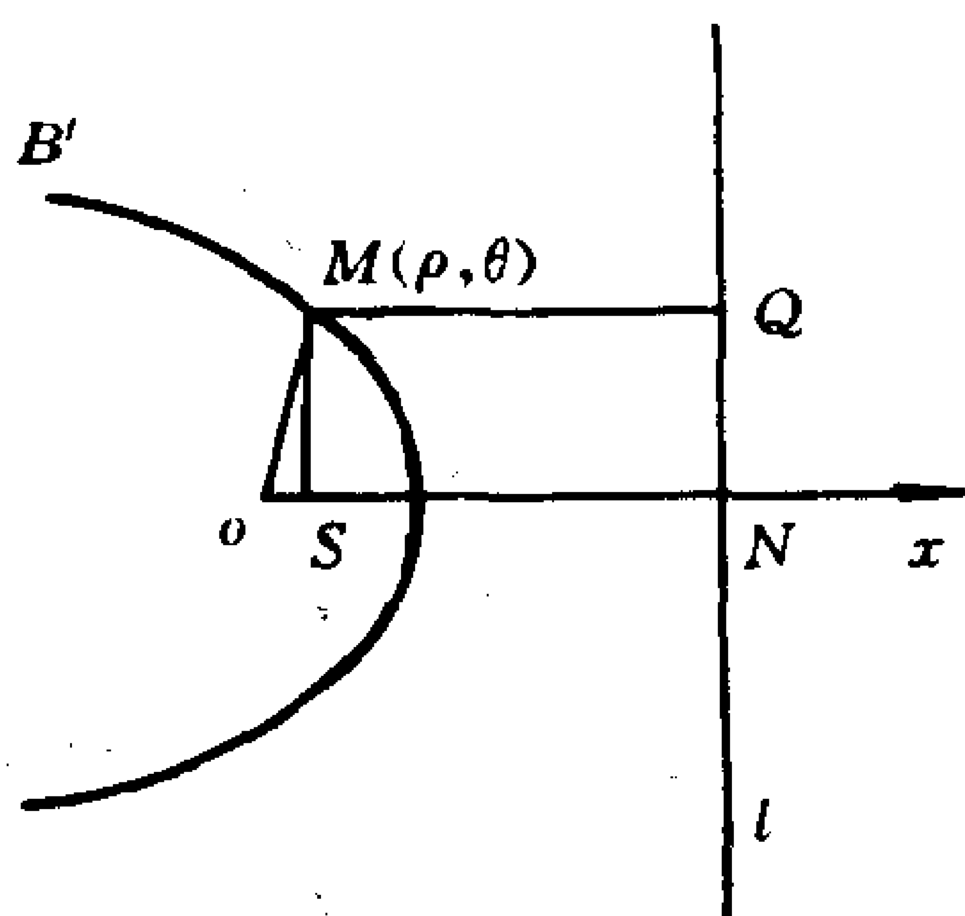


图 3—26

考虑 B' 上任一点 $M(\rho,\theta)$ 到定点 o 与到定直线 $l:\gamma=\frac{p}{\cos\theta}$的距离之比(图 3—26):

$$E=\frac{oM}{MQ}=\frac{oM}{SN}=\frac{\rho}{oN-oS}=\frac{\rho}{p-\rho\cos\theta}$$

因 $M(\rho,\theta)\in B':\rho=\frac{ep}{1-e\cos(\theta+\pi)}$, 所以

$$E=\frac{\frac{ep}{1-e\cos(\theta+\pi)}}{p-\frac{ep}{1-e\cos(\theta+\pi)}\cos\theta}=\frac{ep}{p+ep\cos\theta-ep\cos\theta}$$

$$= e = \frac{a}{b}(\text{常数})$$

由此可见，B'为圆锥曲线，e 为离心率，p 为焦点 o 到定直线 l 的距离，l 即其准线．又由 $e=\frac{a}{b}$知，当 $a<b$、$a=b$ 和 $a>b$ 时，分别有 $e<1$、$e=1$、$e>1$，故分别得到椭圆、抛物线和双曲线．

例 11 设给定直线 l，点 $o\in l$ 和圆 $C(o,R)$，则 l 和 C 关于单位圆(0,1)的反演之和的反演为圆锥曲线，且当 l 与 C 相离、相切和相割时，分别得到椭圆、抛物线和双曲线．

事实上，任意圆锥曲线

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta} \tag{1}$$

关于以极点 o(焦点)为中心的单位圆的反演曲线为

$$\gamma = \frac{1}{\rho} = \frac{1 - e\cos\theta}{ep} = -\frac{1}{p}\cos\theta + \frac{1}{ep}$$

$$= \frac{1}{p}\cos(\theta + \pi) + \frac{1}{ep} \tag{2}$$

显然，将式(2)再反演一次，即得原来的圆锥曲线(1)，但式(2)右边第一项是定直线 l((1)的准线)

$$\gamma = \frac{p}{\cos(\theta + \pi)}$$

关于单位圆(0,1)反演；第二项是定圆$(0,ep)$(式(1)的焦点为中心，ep 为半径的圆，可称为焦点圆)关于同一单位圆的反演，所以式(2)的整个右边是上述二曲线反演之和．

小结 由例 9、10、11 可知，任何圆锥曲线都是其焦点圆(定圆)与相应准线(定直线)反演之和的反演，因此，例 11 实际上揭示了直线、圆与圆锥曲线之间的一个内在联系，也是对圆锥曲线给出了一个新的定义．同时，从已知点求其反演的

过程可借助尺规实现．故由上述定理可知，从直线和圆出发，对巴斯加蚶线和圆锥曲线通过尺规求点描图，而无需像传统的描图方法那样，根据方程计算足够多的点的坐标，然后在坐标系中据坐标求点描图这种繁杂的过程．

习　题　3.3

1．求证当 A、B 不全为零时，$\rho=\dfrac{1}{A\sin\theta+B\cos\theta}$ 表示直线．

2．从极点 o 引直线和直线 l：$A\rho\cos\theta+B\rho\sin\theta+c=0$ 交于一点 N，M 点内分 oN 成 $m:n$ 的比，当 N 点在直线 L 上移动时，求 M 点的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形．

3．讨论 $\rho^n=a^n\sin n\theta$　$(a>0, n=\pm\dfrac{1}{2}, \pm1, \pm2)$ 的曲线．

4．就 a、b 的大小关系，讨论 $\rho=a\cos\theta+b(a\geqslant0, b\geqslant0)$ 的曲线，并作示意图．

5．求双曲线 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$　$(e>1)$ 的渐近线方程．

6．过椭圆或抛物线的焦点有互相垂直的弦，其长分别为 l_1、l_2，求证：$\dfrac{1}{l_1}+\dfrac{1}{l_2}$ 是定值．

7．过双曲线的右焦点 F 的直线交该双曲线右支于 M、N 两点（MN 不与实轴垂直），MN 的中垂线交双曲线的实轴于 Q 点，求证：$2a|FQ|=c|MN|$（$2a$ 为实轴长，c 为半焦距）．

8．推导过圆锥曲线 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 上点 $P_0(\rho_0, \theta_0)$ 处的法线方程．

9．求曲线 $\rho=\dfrac{6}{2-3\cos\theta}$ 过点 $(6, \dfrac{\pi}{2})$ 处的切线和法线方程．

10．将 $\rho=\dfrac{7}{3-4\cos\theta}$ 化为直角坐标系下的标准方程（取极点为原点，极轴为 x 轴正半轴）．

11．化 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-4)^2}{25}=1$ 为极坐标系下的圆锥曲线统一方程形式（取原点为极点，x 正半轴为极轴）．

12. 已知圆锥曲线方程为 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ （$0<e<1$），

(1)求出在极坐标系下的中心、焦点、顶点的坐标；

(2)写出在极坐标系下的准线、对称轴、方程；

(3)计算焦距、长轴及短轴长.

13. 当 θ 按公差为 2 的等差数列增大时，等速螺线 $\rho=k\theta$ 的极径按公差为 3 的等差数列增大，求 R.

第4章　二次曲线的一般理论

在平面直角坐标系中，二元二次方程

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

所表示的曲线称为二次曲线，方程(1)称为二次曲线的方程.

显然，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$、双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$与抛物线$y^2=2px$都是二次曲线.

关于二次曲线，自然会提出这样两个问题：方程(1)除了表示椭圆、双曲线、抛物线外，还表示哪些曲线呢？即二次曲线有哪些类型；怎样将方程(1)化为最简形式，从而确定曲线的形式和位置.

本章将用坐标变换和不变量的方法解决上述两个基本问题，并研究二次曲线的一些几何性质.

为了方便起见，现引进下面一些记号：

$$F(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

$$\Phi(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

$$F_1(x,y) \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$$

$$F_2(x,y) \equiv a_{12}x + a_{22}y + a_{23}$$

$$F_3(x,y) \equiv a_{13}x + a_{23}y + a_{33}$$

这样，方程(1)可写成

$$F(x,y) \equiv xF_1(x,y) + yF_2(x,y) + F_3(x,y) = 0 \quad (2)$$

另外，再记

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

最后介绍一下平面上实点与虚点的概念.在平面上建立笛卡尔直角坐标系之后，一对有序的实数(x,y)就表示平面上的一点，此点称为平面上的实点．如果x、y中至少有一个是虚数，这里仍可认为(x,y)表示平面上一点，这样的点称为平面上的虚点.如果两个虚点的对应坐标都是共轭复数，那么这两点叫做一对共轭虚点，实点与虚点统称为复点.

在平面上引进了虚点之后，曲线的方程中可能出现虚数系数，即实系数方程所表示的曲线上也可能出现虚点.比如，方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$($a$、$b$为实数)所表示的曲线上全是虚点而无实点.值得注意的是，连结两共轭虚点的线段的中点是实点，这是由于两个共轭复数之和为实数.

§4.1　二次曲线与直线的相关位置

设二次曲线Γ方程为(1)，现讨论二次曲线Γ过点(x_0, y_0)且具有方向$l:m$的直线

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad (t\text{为参数}) \qquad (4.1-1)$$

的交点．把式(4.1－1)代入(1)，经整理得到一个关于t的方程

$$\Phi(l,m)t^2 + 2[lF_1(x_0,y_0) + mF_2(x_0,y_0)]t + F(x_0,y_0) = 0 \qquad (4.1-2)$$

求二次曲线 Γ 与直线(4.1－1)的交点的方法是：若能从方程(4.1－2)解出 t，将 t 的每个值代入(4.1－1)，便得出二次曲线与直线的交点坐标．

二次曲线 Γ 与直线(4.1－1)的交点情况，可分为以下两种情形：

(1)$\Phi(l,m)\neq 0$，这时方程(4.1－2)是关于 t 的二次方程，其判别式为

$$\Delta=[lF_1(x_0,y_0)+mF_2(x_0,y_0)]^2-\varphi(l,m)\cdot F(x_0,y_0) \tag{4.1-3}$$

这里又可分为三种情况：

1° $\Delta>0$，方程(4.1－2)有两个不等的实根 t_1、t_2，将 t_1、t_2 分别代入(4.1－1)，便得二次曲线 Γ 与直线的两个不同的实交点．

2° $\Delta=0$，方程(4.1－2)有两个相等的实根 t_1、t_2，这时二次曲线 Γ 与直线有两个重合的实交点．

3° $\Delta<0$，方程(4.1－2)无实根，即二次曲线 Γ 与直线无实点．但方程(4.1－2)有两个共轭的虚根，因此，二次曲线 Γ 与直线相交于两个共轭的虚点．

(2)$\Phi(l,m)=0$，这时也可分为三种情况：

1° $lF_1(x_0,y_0)+mF_2(x_0,y_0)\neq 0$，方程(4.1－2)是 t 的一次方程，它有唯一的一个实根，因此二次曲线 Γ 与直线有唯一的一个实交点；

2° $lF_1(x_0,y_0)+mF_2(x_0,y_0)=0$，但 $F(x_0,y_0)\neq 0$，这时方程(4.1－2)是矛盾方程，它无解，所以二次曲线 Γ 与直线无交点．

3° $lF_1(x_0,y_0)+mF_2(x_0,y_0)=0$，$F(x_0,y_0)=0$，这时方程(4.1－2)为恒等式，$t$ 取任何值都满足方程(4.1－2)，所以直

线上的任何点都是它与二次曲线 Γ 的公共点，因此直线全部在二次曲线 Γ 上.

例 1 讨论直线 $\begin{cases} x=t \\ y=k(t+1) \end{cases}$ 与抛物线 $y^2=4x$ 的相交情况.

解 将直线方程 $\begin{cases} x=t \\ y=k(t+1) \end{cases}$ 代入抛物线方程得

$$k^2t^2 + 2(k^2 - 2)t + k^2 = 0 \qquad (4.1-4)$$

(1)若 $k\neq0$，上式是 t 的二次方程，其判别式为

$$\Delta = 4(k^2 - 2)^2 - 4k^4 = 16(1 - k^2)$$

1° 当 $\Delta>0$，即 $-1<k<1(k\neq0)$ 时，直线与抛物线有两个实交点；

2° 当 $\Delta=0$，即 $k=\pm1$ 时，直线与抛物线有两个重合的实交点；

3° 当 $\Delta<0$，即 $k>1$ 或 $k<-1$ 时，直线与抛物线无实交点，但有两个共轭的虚交点.

(2)若 $k=0$，(4.1-4)是 t 的一次方程，有唯一的一个解，所以直线与抛物线只有一个实交点(0,0).

评注 在讨论直线与二次曲线的交点时，可以不必求出直线的参数方程，而把直线的普通方程直接代入二次曲线方程，得到一个关于 x 或 y 的一元方程，然后通过讨论此方程根的情况确定直线与二次曲线的相交情况.

例 2 问 k 为何值时，直线 $y=kx$ 与二次曲线

$$3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$$

有两个重合的实交点.

解 将直线方程 $y=kx$ 代入二次曲线方程得

$$(5k^2 + 7k + 3)x^2 + (5k + 4)x + 1 = 0$$

当
$$\Delta=(5k+4)^2-4(5k^2+7k+3)$$
$$=5k^2+12k+4=0$$

即 $k=-2$ 或 $k=-\dfrac{2}{5}$ 时，直线与二次曲线有两个重合的实交点(因为此时 $5k^2+7k+3=0$).

习 题 4.1

1. 求二次曲线 $4x^2-4xy+3y^2-4x=0$ 与下列直线的交点：

(1) $y=0$;

(2) $2x-3y-7=0$;

(3) $\begin{cases} x=3t-2 \\ y=t-1 \end{cases}$

2. 试确定实数 λ，使：

(1) 直线 $\begin{cases} x=t-5 \\ y=t \end{cases}$ 与曲线 $x^2-3x+y+\lambda=0$ 相交于两个不同的实点；

(2) 直线 $2x-y+7=0$ 与曲线 $x^2+2\lambda xy-y^2+5x-9=0$ 相交于一点；

(3) 直线 $x+\lambda y-1=0$ 与曲线 $y^2-2xy-(1-\lambda)y-1=0$ 相交于两个重合的实点；

(4) 直线 $x+y-2=0$ 与曲线 $2x^2+\lambda y^2+4xy-2y-x=0$ 有两个共轭的虚交点.

3. 当 λ 取哪些值时，直线 $y=x+\lambda$ 与曲线 $9x^2+16y^2-144=0$ 有两个不同的实交点？有两个重合的实交点？无交点？

§4.2 二次曲线的切线和奇点

定义 4.2.1 如果一直线与二次曲线相交于两个重合的点，则称这条直线为二次曲线的切线，这个重合的交点称为切点. 如果一直线全部在二次曲线上，则称它为二次曲线的切

线，直线上的每一点都可以看作切点.

设二次曲线方程为

$$F(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

现求经过二次曲线(1)上一点(x_0,y_0)的切线方程. 由于过点(x_0,y_0)的直线方程可写成

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad (2)$$

于是，根据§4.1中的讨论可知，直线(2)为二次曲线(1)的切线条件：

当$\Phi(l,m) \neq 0$时，

$$[lF_1(x_0,y_0) + mF_2(x_0,y_0)]^2 - \Phi(l,m) \cdot F(x_0,y_0) = 0 \quad (4.2-1)$$

因为点(x_0,y_0)在二次曲线(1)上，所以$F(x_0,y_0)=0$，(4.2—1)式化为

$$lF_1(x_0,y_0) + mF_2(x_0,y_0) = 0 \quad (4.2-2)$$

当$\Phi(l,m)=0$时，根据§4.1中的讨论可知，直线(2)为二次曲线(1)的切线条件也是(4.2—1).

如果$F_1(x_0,y_0)$与$F_2(x_0,y_0)$不全为零，则由(4.2—2)可得出切线方向为

$$l : m = F_2(x_0,y_0) : (-F_1(x_0,y_0))$$

因此，二次曲线(1)经过它上面一点(x_0,y_0)的切线参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + F_2(x_0,y_0)t \\ y = y_0 - F_1(x_0,y_0)t \end{cases}$$

消去参数，得到切线的普通方程

$$(x-x_0)F_1(x_0,y_0)+(y-y_0)F_2(x_0,y_0)=0 \qquad (4.2-3)$$

方程(4.2－3)还可写成

$$a_{11}x_0x+a_{12}(x_0y+xy_0)+a_{22}y_0y$$
$$+a_{13}(x+x_0)+a_{23}(y+y_0)+a_{33}=0$$
$$(4.2-4)$$

由此可见，求二次曲线(1)经过它上面一点(x_0,y_0)的切线方程，只要在方程(1)中将x^2与y^2分别换成x_0x、y_0y，将xy、x、y分别换成$\frac{1}{2}(x_0y+xy_0)$、$1/2(x+x_0)$、$1/2(y+y_0)$，便得出所求的切线方程.

在上面的讨论中，如果$F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0$，那么(4.2－2)为恒等式，这时切线方向不能被唯一的确定，从而切线不确定．由§4.1中的讨论可知，通过点(x_0,y_0)的任何直线都和二次曲线(1)相交于两重合点，因此，可把过点(x_0,y_0)的任何直线看成二次曲线(1)的切线.

定义 4.2.2 二次曲线(1)上满足条件$F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0$的点$(x_0,y_0)$称为二次曲线(1)的奇异点，简称为奇点；二次曲线的非奇点称为二次曲线的正常点.

由定义及上面的讨论可知，二次曲线在正常点有唯一确定的切线，二次曲线在奇点切线不确定，即过奇点的每一条直线都为二次曲线的切线.

由上面的讨论得到：

定理 4.2.1 经过二次曲线(1)的正常点(x_0,y_0)有唯一确定的切线，其方程为(4.2－3)或(4.2－4)；切点为(x_0,y_0)，经过二次曲线(1)的奇点(x_0,y_0)的切线不确定，或者说过奇点(x_0,y_0)的每一条直线都是二次曲线(1)的切线.

点(x_0,y_0)为二次曲线(1)的奇点当且仅当

$$F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=F(x_0,y_0)=0$$

而 $$F(x,y)\equiv xF_1(x,y)+yF_2(x,y)+F_3(x,y)$$

所以，点(x_0,y_0)为二次曲线(1)的奇点的充分必要条件为

$$F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=F_3(x_0,y_0)=0$$

即齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0 \\ a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z=0 \\ a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z=0 \end{cases}$$

有非零解$(x_0,y_0,1)$. 此方程组有非零解的充分必要条件是其系数行列$I_3=0$，于是得到

定理 4.2.2 二次曲线(1)上有奇点的充分必要条件为

$$I_3=0 \tag{4.2-5}$$

由定理 4.2.1 可知，求经过二次曲线上的正常点(x_0,y_0)的切线方程，只要利用公式(4.2—3)或(4.2—4)便可直接得出．

例 1 求曲线 $x^2+xy+y^2-3=0$ 在点(1,1)的切线方程.

解法一 因为 $F(1,1)=1+1+1-3=0$

$$F_1(1,1)=F_2(1,1)=\frac{3}{2}\neq 0$$

所以，点(1,1)是二次曲线上的正常点，由公式(4.2—4)得所求切线方程为

$$x+\frac{1}{2}(x+y)+y-3=0$$

即 $$\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y-3=0$$

解法二 因为 $F_1(1,1)=F_2(1,1)=\frac{3}{2}$，$F(1,1)=0$，所以，点(1,1)是二次曲线的正常点，由公式(4.2—3)得所求切线方程为

$$\frac{3}{2}(x-1)+\frac{3}{2}(y-1)=0$$

即
$$\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y-3=0$$

例 2 证明双曲线$\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{1}=1$和椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$在交点处的切线互相垂直.

解 先求出双曲线与椭圆的交点坐标,再分别求出它们在交点处的切线方程,最后验证它们在交点处的切线互相垂直.

将双曲线方程与椭圆方程联立求解,得

$$\begin{cases} x=\pm\frac{5\sqrt{15}}{4} \\ y=\pm\frac{3}{4} \end{cases}$$

它们的四个交点为

$$A_1(\frac{5\sqrt{15}}{4},\frac{3}{4}),\quad A_2(\frac{5\sqrt{15}}{4},-\frac{3}{4}),$$

$$A_3(-\frac{5\sqrt{15}}{4},\frac{3}{4}),\quad A_4(-\frac{5\sqrt{15}}{4},-\frac{3}{4})$$

利用公式(4.2—4)直接可得双曲线与椭圆在交点A_1处的切线方程分别为

$$\frac{\sqrt{15}}{12}x-\frac{3}{4}y=1$$

$$\frac{\sqrt{15}}{20}x+\frac{1}{12}y=1$$

它们的斜率分别为

$$k_1=\frac{\sqrt{15}}{9},k_2=-\frac{3\sqrt{15}}{5}$$

因为 $$k_1k_2=-1$$

所以，双曲线与椭圆在交点 A_1 处的切线垂直. 同理可证它们在其他三个交点处的切线也分别垂直.

如果点 (x_0, y_0) 不在二次曲线上，那么二次曲线经过 (x_0, y_0) 的切线方程就不是方程(4.2－3)或(4.2－4)，这时可利用直线与二次曲线相切的条件，求出过点 (x_0, y_0) 的切线方向 $l:m$ 的切线方程；或利用公式(4.2－3)或(4.2－4)先求出切点的坐标，再求出切线方程.

例 3 求二次曲线 $x^2-xy+y^2-1=0$ 经过点(0,2)的切线方程.

解法一 因为 $F(0,2)=3$，所以点(0,2)不在二次曲线上，因此不能直接利用公式(4.2－3)或(4.2－4).

设二次曲线过点(0,2)的切线方程为

$$\begin{cases} x=lt \\ y=2+mt \end{cases}$$

将上式代入二次曲线方程，得

$$(l^2-lm+m^2)t^2+2(2m-l)t+3=0$$

由于直线与二次曲线相切，所以以上方程有两个相等的实根，从而其判别式为零，即

$$(2m-l)^2-3(l^2-lm+m^2)=0$$

化简得

$$(2l-m)(l+m)=0$$

$$2l-m=0, l+m=0$$

从而 $l:m=1:2$，$l:m=1:-1$，且此时 $l^2+ml+m^2\neq 0$. 所以，过点(0,2)的切线方程为

$$\begin{cases} x=t \\ y=2+2t \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x=t \\ y=2-t \end{cases}$$

即　　　　$2x-y+2=0$ 与 $x+y-2=0$

解法二　设过点(0,2)的切线与二次曲线相切于点(x_0, y_0)，由公式(4.2—4)知切线方程为

$$x_0x-\frac{1}{2}(x_0y+xy_0)+y_0y-1=0 \quad (4.2-5)$$

由于切线过点(0,2)，所以点(0,2)的坐标满足切线方程，从而得

$$x_0-2y_0+1=0 \quad (4.2-6)$$

另外，点(x_0,y_0)在二次曲线上，所以有

$$x_0^2-x_0y_0+y_0^2-1=0 \quad (4.2-7)$$

联立(4.2—6)、(4.2—7)求解，得

$$\begin{cases}x_0=1\\y_0=1\end{cases} \text{与} \begin{cases}x_0=-1\\y_0=0\end{cases}$$

将切点坐标分别代入式(4.2—5)得所求切线方程为

$$x+y-2=0 \text{ 与 } 2x-y+2=0$$

评注　用判别式求直线与二次曲线的重交点和求切线方向的问题时，应当注意切线方向不应是渐近方向.

例4　问 m 为何值时，直线 $y=-2x+m$ 与双曲线 $x^2-4y^2-9=0$ 相切.

解法一　将直线方程代入双曲线方程得

$$15x^2-16mx+4m^2+9=0 \quad (4.2-8)$$

当方程(4.2—8)有两个相等的实根，即它的判别式为零时，直线与双曲线相切.

$$\Delta=(-16m)^2-4\times15\times(4m^2+9)=0$$

即　　　　$4m^2-135=0$

故当 $m=\pm\frac{3\sqrt{15}}{2}=0$ 时，直线与双曲线相切.

解法二 设直线 $y=-2x+m$ 与双曲线 $x^2-4y^2-9=0$ 相切于点(x_0,y_0)，则双曲线在该点的切线方程为

$$x_0x-4y_0y-9=0 \qquad (4.2-9)$$

其斜率

$$k=\frac{x_0}{4y_0}=-2$$

由此得

$$x_0=-8y_0 \qquad (4.2-10)$$

另一方面，点(x_0,y_0)在双曲线上，从而有

$$x_0^2-4y_0^2-9=0 \qquad (4.2-11)$$

与(4.2−11)联立求解得

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{12}{\sqrt{15}} \\ y_0=-\dfrac{3}{2\sqrt{15}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0=-\dfrac{12}{\sqrt{15}} \\ y_0=\dfrac{3}{2\sqrt{15}} \end{cases}$$

将它们分别代入(4.2−9)得双曲线的两条切线方程

$$y=-2x\pm\frac{3\sqrt{15}}{2}$$

故 $m=\pm\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$ 时，直线 $y=-2x+m$ 与双曲线相切.

习　题　4.2

1. 求下列二次曲线在所给点或经过所给点的切线方程：

(1)曲线 $3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$ 在点$(-2,1)$；

(2)曲线 $x^2+9y^2-40=0$ 在点$(2,-2)$；

(3)曲线 $3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0$ 经过原点；

(4)曲线 $2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0$ 经过点$(3,4)$.

2. 求二次曲线 $x^2-2y^2-5x+4y+6=0$ 在与坐标轴交点处的切线方程.

3. 求二次曲线 $x^2+xy+y^2+2x+3y-3=0$ 平行于 x 轴的切线方程.

4. 求双曲线 $x^2-4y^2-9=0$ 垂直于直线 $x-2y+1=0$ 的切线方程.

5. 求抛物线 $y^2=5x$ 与圆 $9x^2+9y^2=16$ 的公切线方程.

6. 问 k、m 间满足什么关系时，直线 $y=kx+m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相切.

7. 试求经过原点且切直线 $4x+3y+2=0$ 于点 $(1,-2)$ 及切直线 $x-y-1=0$ 于点 $(0,-1)$ 的二次曲线方程.

8. 在椭圆(或双曲线)上任一点引切线，试证两焦点到此切线的距离之积为常数.

§4.3 二次曲线的渐近方向、中心和渐近线

对于二次曲线

$$F(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{1}$$

如果一直线方向 $l:m$ 满足条件 $\Phi(l,m)=0$，那么由§4.1中讨论可知，这条直线和二次曲线(1)或只有一个交点，或没有交点，或直线在二次曲线上，把这样的方向定义为二次曲线的渐近方向.

定义 4.3.1 满足条件 $\Phi(l,m)=0$ 的方向 $l:m$ 称为二次曲线(1)的渐近方向，否则就称为非渐近方向.

二次曲线(1)的二次项系数 a_{11}、$2a_{12}$、a_{22} 不全为零，由定义 4.3.1 可知，二次曲线(1)的渐近方向 $l:m$ 由下面的方程(4.3－1)完全确定. 可通过解方程(4.3－1)得到二次曲线(1)的渐近方向.

$$\Phi(l,m)\equiv a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=0 \tag{4.3-1}$$

下面通过对方程(4.3－1)解的情况的讨论，来了解二次曲线(1)的渐近方向的情况.

(i) 若 $a_{11}\neq 0$，则有 $m\neq 0$（否则由（4.3—1）知 $l=0$，矛盾）. 式（4.3—1）可写为

$$a_{11}\left(\frac{l}{m}\right)^2 + 2a_{12}\frac{l}{m} + a_{22} = 0$$

解得

$$\frac{l}{m} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-I_2}}{a_{11}}$$

(ii) 若 $a_{22}\neq 0$，则有 $l\neq 0$，（4.3—1）可写成

$$a_{22}\left(\frac{m}{l}\right)^3 + 2a_{12}\frac{m}{l} + a_{11} = 0$$

解得 $$\frac{m}{l} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{12}}}{a_{22}} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-I_2}}{a_{22}}$$

(iii) 若 $a_{11}=a_{22}=0$，则有 $a_{12}\neq 0$，（4.3—1）即为

$$2a_{12}lm = 0$$

所以 $$l:m = 1:0 \text{ 或 } l:m = 0:1$$

这时 $$I_2 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{vmatrix} = -a_{12}^2 < 0$$

从上面三种情况可知，当且仅当 $I_2>0$ 时，二次曲线（1）没有实渐近方向（或有一对共轭的虚渐近方向）；当且仅当 $I_2=0$ 时，二次曲线（1）有一个实渐近方向；当且仅当 $I_2<0$ 时，二次曲线（1）有两个不同的实渐近方向.

由此可见，二次曲线的渐近方向最多只有两个，因此，非渐近方向有无数多个. 按照二次曲线渐近方向的情况将二次曲线分为三种类型.

定义 4.3.2

(i) 没有实渐近方向的二次曲线称为椭圆型二次曲线；

(ii) 只有一个实渐近方向的二次曲线称为抛物型二次曲

线；

(iii) 有两个不同实渐近方向的二次曲线称为双曲线型二次曲线.

由定义 4.3.2 及上面的分析可知，二次曲线为椭圆型、抛物型、双曲线型的充分条件分别是 $I_2>0$、$I_2=0$、$I_2<0$. 由此可见，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$、抛物线 $y^2=2px$、双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 分别为椭圆型、抛物型、双曲线型二次曲线，椭圆无实渐近方向，抛物线有一个实渐近方向 $1:0$（即为其对称轴的方向），双曲线有两个不同的实渐近方向 $a:b$ 与 $-a:b$.

下面介绍二次曲线的中心与渐近线的概念.

在 §4.1 中知道，当直线

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases} \qquad (4.3-2)$$

的方向 $l:m$ 是二次曲线(1)的非渐近方向时，此直线与二次曲线(1)总有两个交点（两不同实的，两重合实的，一对共轭虚的），把连结这两点间的线段称为二次曲线的弦.

定义 4.3.3 如果存在一点 C，使得二次曲线过点 C 的所有弦都以 C 点为中心，则称点 C 为二次曲线的中心.

根据定义，如果二次曲线有中心，那么此中心就是二次曲线的对称中心. 如椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=19$（或双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$），它的过原点 o 的所有弦都以点 o 为中心点，所以点 o 为椭圆（或双曲线）的中心，即为其对称中心.

有了中心的概念，自然会提出这样的问题：是否每条二次曲线都有中心呢？对于有中心的二次曲线，其中心是否唯一？中心怎样确定呢？现在来讨论此问题.

假设点 $C(x_0,y_0)$ 为二次曲线(1)的中心，那么过点 $C(x_0,$

y_0)以二次曲线(1)的非渐近方向$l:m$为方向的任意直线(4.3−2)与二次曲线(1)相交于两点P_1、P_2，点P_1、P_2以点C为中心，设点P_1、P_2分别对应参数t_1、t_2. 将(4.3−2)代入式(1)，得

$$\Phi(l,m)t^2 + 2[lF_1(x_0,y_0) + mF_2(x_0,y_0)]t + F(x_0,y_0) = 0$$

则上一方程的两根为t_1、t_2. 点$C(x_0,y_0)$是点P_1、P_2的中点的充分必要条件为

$$t_1 + t_2 = 0$$

即
$$lF_1(x_0,y_0) + mF_2(x_0,y_0) = 0 \quad (4.3-4)$$

上面说明点$C(x_0,y_0)$为二次曲线(1)的中心的充分必要条件是：对二次曲线(1)的任意非渐近方向$l:m$，式(4.3−4)成立. 由于渐近方向有无数多个，故式(4.3−4)等价于

$$F_1(x_0,y_0) = F_2(x_0,y_0) = 0$$

于是得到：

定理 4.3.1 点$C(x_0,y_0)$为二次曲线(1)的中心的充分必要条件为

$$\begin{cases} F_1(x_0,y_0) \equiv a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ F_2(x_0,y_0) \equiv a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases} \quad (4.3-5)$$

由定理 4.3.1 可得下面的推论：

推论 4.3.1 坐标原点为二次曲线的中心，当且仅当二次曲线方程中不含一次项.

由定理 4.3.1 可知，二次曲线(1)的中心坐标完全由下列方程组(4.3−6)所确定，即

$$\begin{cases} F_1(x,y) \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ F_2(x,y) \equiv a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} \quad (4.3-6)$$

因此，二次曲线(1)有唯一中心、无中心、无数中心的充分必要条件分别为方程组(4.3−6)有唯一解、无解、无数多个

解.

当 $I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 时,方程组(4.3—6)有唯一解,这时二次曲线(1)有唯一中心,中心坐标即为方程组(4.3—6)的解.

当 $I_2=0$,即 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}$ 时,有两种情况:

(1)如果 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$,则方程组(4.3—6)无解,这时二次曲线(1)无中心;

(2)如果 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$,方程组(4.3—6)有无数多解,这时直线 $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$(或 $a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0$)上每点的坐标都是方程组(4.3—6)的解,所以直线叫做中心直线.

综合上述分析,则有

定理 4.3.2 当 $I_2\neq 0$ 时,二次曲线有唯一中心,中心坐标即为方程组(4.3—6)的解.当 $I_2=0$ 时,如果 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$,二次曲线无中心;如果 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$,二次曲线的中心构成了一条直线 $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$(或 $a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0$).

下面按照二次曲线的中心情况将二次曲线加以分类.

定义 4.3.4 有唯一中心的二次曲线称为中心二次曲线,否则称为非中心二次曲线.在非中心二次曲线中,没有中心的称为无心二次曲线,有一条中心直线的称为线心二次曲线.

按定义,这种分类即为:

$I_2\neq 0$:中心二次曲线;

$$I_2=0:\text{非中心二次曲线}\begin{cases}\dfrac{a_{11}}{a_{12}}=\dfrac{a_{12}}{a_{22}}\neq\dfrac{a_{13}}{a_{23}}:\text{无心二次曲线}\\[2ex]\dfrac{a_{11}}{a_{12}}=\dfrac{a_{12}}{a_{22}}=\dfrac{a_{13}}{a_{23}}:\text{线心二次曲线}\end{cases}$$

前面已将二次曲线按照渐近方向与中心的情况作了两种分类，这两种分类有着这样的联系，椭圆型与双曲型二次曲线即为中心二次曲线，抛物型二次曲线即为非中心二次曲线，它包括无心与线心二次曲线. 关于非中心二次曲线，可根据 I_3 是否为零区分出无心与线心曲线，即有如下结论：

(1)　当且仅当 $I_2=0$，且 $I_3\neq0$ 时，二次曲线为无心曲线；

(2)　当且仅当 $I_2=0$，且 $I_3=0$ 时，二次曲线为线心二次曲线.

这个结论的证明将作为习题留给读者完成.

有了二次曲线中心与渐近方向的概念，现给出二次曲线渐近线的定义.

定义 4.3.5　经过二次曲线的中心，且以二次曲线的渐近方向为方向的直线称为二次曲线的渐近线.

椭圆型二次曲线虽有唯一中心，但没有渐近方向，所以椭圆型二次曲线无渐近线. 双曲型二次曲线有唯一中心，且有两个不同的渐近方向，所以双曲型二次曲线有两条不同的渐近线. 在抛物型二次曲线中，无心二次曲线没有渐近线；线心二次曲线有一个渐近方向、一条中心直线，且渐近方向就是中心直线的方向，所以线心二次曲线有一条渐近线，即为它的中心直线.

最后介绍二次曲线渐近线的一个性质. 由于二次曲线的渐近线的方向是渐近方向，所以渐近线与二次曲线或只有一个交点，或无交点，或渐近线在二次曲线上，故可以断言渐近线与二次曲线不会有一个交点. 因为渐近方向 $l:m$ 满足

$\Phi(l,m)=0$，渐近线过曲线的中心(x_0,y_0)，从而

$$lF_1(x_0,y_0)+mF_2(x_0,y_0)=0$$

由§4.1中的讨论可知，渐近线与二次曲线不可能只有一个交点．当$F(x_0,y_0)\neq 0$时，渐近线与二次曲线无交点，当$F(x_0,y_0)\equiv 0$时，渐近线在二次曲线上．

定理 4.3.3 二次曲线的渐近线与二次曲线或没有交点或渐近线在二次曲线上．

例 1 求下列二次曲线的中心和渐近线：

(1)$16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$；

(2)$2x^2-4xy+5y^2-8x+6=0$；

(3)$3x^2+6xy+3y^2-2x+3y+1=0$；

(4)$x^2+4xy+4y^2-4x-8y+3=0$．

解 (1)先求此曲线的中心．解方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y)\equiv 16x-32=0 \\ F_2(x,y)\equiv -9x-27=0 \end{cases}$$

得$x=2,y=-3$，所以此二次曲线中心为$(2,-3)$．

再求此曲线的渐近方向．由

$$\Phi(l,m)=16l^2-9m^2=0$$

得$\dfrac{l}{m}=\dfrac{3}{4}$，或$\dfrac{l}{m}=-\dfrac{3}{4}$．所以渐近线的斜率为$\dfrac{4}{3}$或$-\dfrac{4}{3}$，故所求渐近线方程为

$$y+3=\frac{4}{3}(x-2) \text{ 与 } y-3=-\frac{4}{3}(x-2)$$

即
$$4x-3y-17=0 \text{ 与 } 4x+3y+1=0$$

(2)解方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y)\equiv 2x-2y-4=0 \\ F_2(x,y)\equiv -2x+5y=0 \end{cases}$$

得 $x=\frac{10}{3}, y=\frac{4}{3}$,所以二次曲线的中心为$(\frac{10}{3},\frac{4}{3})$.

由于 $I_2=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=6>0$,所以二次曲线无渐近方向,故二次曲线无渐近线.

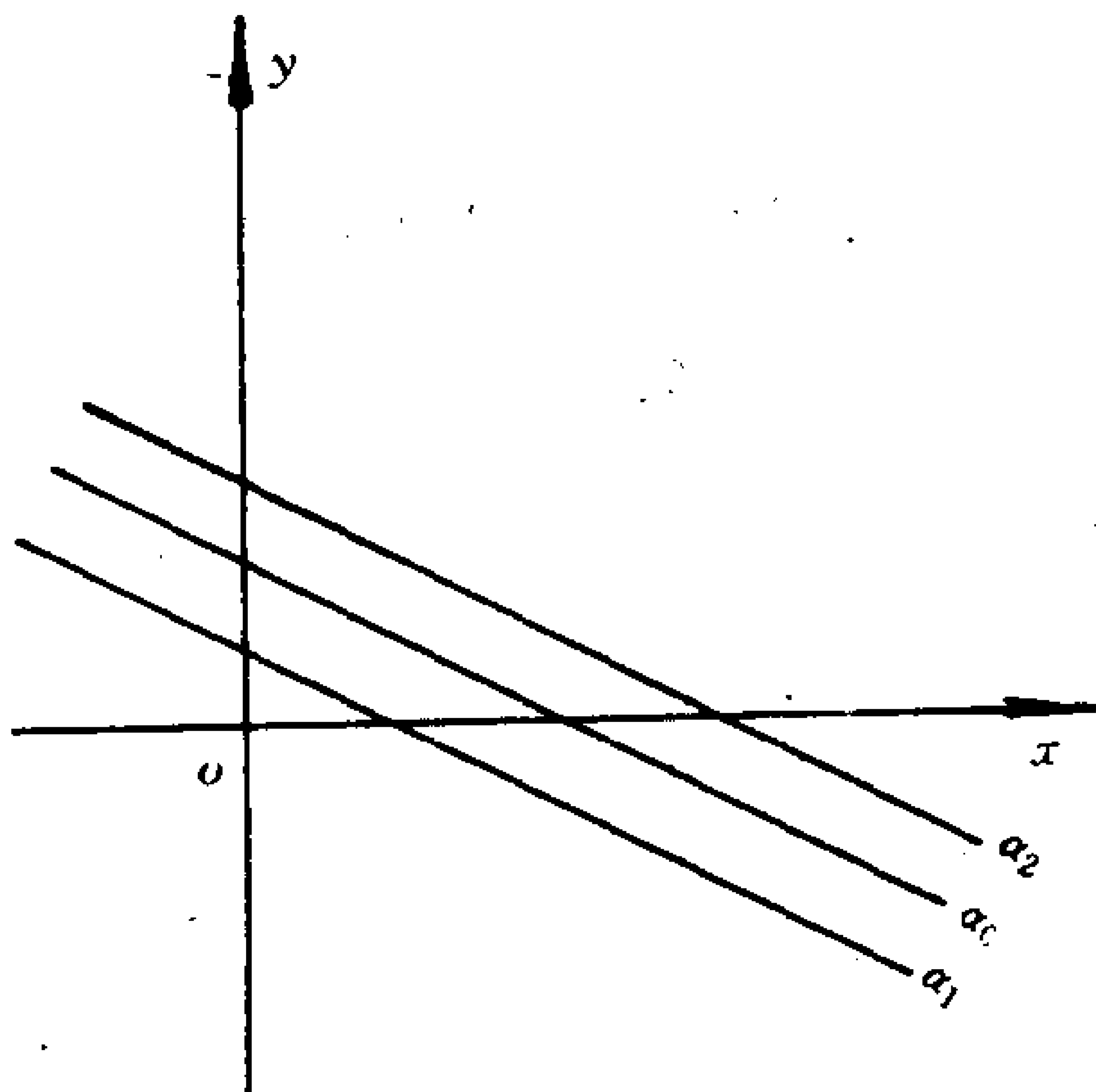


图 4-1

(3)由于方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y) \equiv 3x + 3y - 1 = 0 \\ F_2(x,y) \equiv 3x + 3y + \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$$

无解,所以二次曲线无中心,从而无渐近线.

(4)由于方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y) \equiv x + 2y - 2 = 0 \\ F_2(x,y) \equiv 2x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

有无数多解,所以二次曲线有无数多中心,构成一条中心直线

$$\alpha_0: x + 2y - 2 = 0$$

因为 $\Phi(l,m)=l^2+4lm+4m^2=0$,所以,二次曲线只有一个渐近方向 $l:m=-2:1$,此方向即为二次曲线的中心直线 α_0

的方向. 故二次曲线的渐近线即为它的中心直线 α_0.

二次曲线方程可化为

$$(x+2y-1)(x+2y-3)=0$$

它表示两条平行直线

$$\alpha_1: x+2y-1=0$$

$$\alpha_2: x+2y-3=0$$

中心直线 α_0 就是位于直线 α_1 与 α_2 之间的一条直线.

习　题　4.3

1. 求下列二次曲线的中心,并指出它是中心曲线、无心曲线还是线心曲线.

(1) $x^2-xy+3y^2+x-1=0$;

(2) $x^2+2xy+y^2+2x+y-5=0$;

(3) $x^2+2xy+y^2+x+y-5=0$;

(4) $3x^2-4xy+6y^2-8x-4y-3=0$;

(5) $4x^2+4xy+y^2-10x-5y+6=0$.

2. 求下列二次曲线的渐近方向,并指出它是椭圆型、双曲型还是抛物型曲线.

(1) $x^2-4xy+4y^2-2x+4y-1=0$;

(2) $2x^2+2xy+3y^2-2x+y+3=0$;

(3) $x^2-xy-2y^2-3y-6=0$;

(4) $x^2-2y+7x-4=0$.

3. 求下列二次曲线的渐近线.

(1) $2x^2-3xy-x+3y+4=0$;

(2) $3x^2+2xy-y^2+8x+10y+14=0$;

(3) $x^2+2xy+y^2+2x+2y=0$;

(4) $2x^2+4xy-3x-y-2=0$;

(5) $x^2-2xy+y^2-4x+6y-1=0$.

4. 确定 λ 的值,使 $(\lambda+1)^2x^2+2\lambda xy+2\lambda^2y^2-2\lambda x-2\lambda^2y=0$ 表示

中心曲线，并求出它所表示的中心曲线的中心轨迹.

5. 设二次曲线经过点(2,3)、(4,2)、(−1,−3)，且以点(0,1)为中心，求此二次曲线方程.

6. 问 a、b 满足什么条件时，二次曲线

$$x^2+6xy+ay^2+3x+by-4=0$$

表示(1)中心曲线；(2)无心曲线；(3)线心曲线.

7. 设二次曲线有两个渐近方向 $l:m=1:0$ 与 $l:m=0:1$，它的中心为(−1,1)，且与直线 $x+y=0$ 相切，求此二次曲线方程.

8. 证明：

(1) 二次曲线为无心曲线，当且仅当 $I_2=0, I_3\neq 0$；

(2) 二次曲线为线心二次曲线，当且仅当 $I_2=0, I_3=0$.

§4.4 二次曲线的直径与主直径

一、二次曲线的直径

在§4.1中已经知道，如果 $l:m$ 是二次曲线的一个非渐近方向，那么平行于此方向的直线与二次曲线有两个交点，这两点决定了二次曲线的一条弦. 下面求平行于此非渐近方向 $l:m$ 的所有弦的中点的轨迹. 其方法是写出以点 (x_0,y_0) 为中点的弦的参数方程，代入二次曲线方程便得到一个关于 t 的二次方程，利用此二次方程两根之和为零的条件，得到 x_0、y_0 所满足的关系式即为所求轨迹之方程.

设 (x_0,y_0) 是平行于渐近方向 $l:m$ 的一条弦的中点，那么此弦的方程为

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases} \qquad (4.4-1)$$

将上式代入二次曲线方程 $F(x,y)=0$，得

$$\Phi(l,m)t^2+2[lF_1(x_0,y_0)+mF_2(x_0,y_0)]t$$

$$+F(x_0,y_0)=0 \qquad (4.4-2)$$

弦方程(4.4－1)与二次曲线的两个交点 P_1、P_2 所对应的参数 t_1、t_2 是方程(4.4－2)的两根，由于弦 P_1、P_2 的中点(x_0，y_0)对应参数 $t_0=0$，所以有

$$t_1+t_2=0,$$

根据二次方程根与系数之间的关系有

$$lF_1(x_0,y_0)+mF_2(x_0,y_0)=0$$

这说明平行于非渐近方向 $l:m$ 的所有弦的中点(x_0，y_0)满足方程

$$lF_1(x,y)+mF_2(x,y)=0 \qquad (4.4-3)$$

即

$$(a_{11}l+a_{12}m)x+(a_{12}l+a_{22}m)y+a_{13}l+a_{23}m=0 \qquad (4.4-3')$$

反之，如果点(x_0，y_0)的坐标满足方程(4.4－3)，那么方程(4.4－2)的两根之和为零，从而点(x_0，y_0)就是弦 P_1P_2 的中点．所以(4.4－3)或(4.4－3′)就是二次曲线平行于非渐近方向 $l:m$ 的所有弦的中点的轨迹方程．对于非渐近方向 $l:m$，有

$$\Phi(l,m)\equiv a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=(a_{11}l+a_{12}m)l+(a_{12}l+a_{22}m)m\neq 0$$

因此，方程(4.4－3′)中一次项系数不可能全为零，它表示一条直线，于是得到：

定理 4.4.1 平行于二次曲线的一个非渐近方向的所有弦的中点的轨迹是一条直线，其方程为(4.4－3)或(4.4－3′)．

定义 4.4.1 平行于二次曲线的一个非渐近方向 $l:m$ 的所有弦的中点的轨迹(直线(4.4－3))称为二次曲线共轭于方向 $l:m$ 的直径．这条直径的方向

$$l : m' = -(a_{12}l + a_{22}m) : (a_{11}l + a_{12}m) \tag{4.4-4}$$

叫做非渐近方向 $l : m$ 的共轭方向.

现在来讨论与非渐近方向 $l : m$ 的共轭方向在什么情况下是非渐近方向,在什么情况下是渐近方向.

$$\begin{aligned}
\Phi(l',m') &= \Phi(-a_{12}l - a_{22}m, a_{11}l + a_{12}m) \\
&= a_{11}(a_{12}l + a_{22}m)^2 - 2a_{12}(a_{12}l + a_{22}m) \\
&\quad (a_{11}l + a_{22}m) + a_{22}(a_{11}l + a_{12}m)^2 \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2) \\
&= I_2\Phi(l,m)
\end{aligned} \tag{4.4-5}$$

由此可得如下结论:

定义 4.4.2 对中心曲线($I_2 \neq 0$),每个非渐近方向的共轭方向也是非渐近方向;对非中心曲线($I_2 = 0$),每个非渐近方向的共轭方向都是渐近方向.

由于非中心曲线只有一个渐近方向,所以非中心曲线的直径都平行于此渐近方向. 另外,由(4.4—4)式可知,一个非渐近方向 $l : m$ 与方向 $l' : m'$ 共轭的充分必要条件为

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + l'm) + a_{22}mm' = 0 \tag{4.4-6}$$

(4.4—6)式关于两个方向 $l : m$ 与 $l' : m'$ 是对称的,因此,对中心曲线来说,若非渐近方向 $l : m$ 的共轭方向与 $l' : m'$,那么方向 $l' : m'$ 的共轭方向就是 $l : m$,即中心二次曲线的两个方向共轭是相互的,把这样的两个方向称为一对共轭的方向.

定理 4.4.2 若中心二次曲线的一对直径的方向是相互共轭的,则称这对直径为一对共轭直径.

下面讨论二次曲线直径的情况. 由前述可知二次曲线的与方向 $l : m$ 共轭的直径方程为(4.4—3). 由于当 $I_2 \neq 0$ 即

$(\frac{a_{11}}{a_{12}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}})$时，

$$F_1(x,y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \qquad (4.4-7)$$

$$F_2(x,y) = a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \qquad (4.4-8)$$

表示两条相交直线，交点为二次曲线的中心，方程(4.4－3)表示过二次曲线中心的直线束，所以中心二次曲线的所有直径都属于它的中心直线束.

当 $I_2=0$ 时，可分为以下两种情况：

(i)若$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$，(4.4－7)与(4.4－8)表示两条平行直线，从而方程(4.4－3)表示平行直线束，这时二次曲线的所有直径都平行于它的一个渐近方向；

(ii)若$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$，(4.4－3)只能表示一条直线$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$(或$a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0$)，即为线心二次曲线的中心直线.

通过上面的讨论，可得到：

定理 4.4.3 中心二次曲线的直径通过曲线的中心，无心二次曲线的直径平行于曲线的渐近方向，线心二次曲线的直径仅有一条，即为线心二次曲线的中心直线.

例 1 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$)共轭于非渐近方向 $l:m$ 的直径，并证明两直线 $y=kx$ 与 $y=k'x$ 是椭圆(双曲线)的一对共轭直径的充分必要条件是 $kk'=-\frac{b^2}{a^2}$($kk'=\frac{b^2}{a^2}$).

解 对于椭圆，$F_1(x,y)=\frac{x}{a^2}$，$F_2(x,y)=\frac{y}{b^2}$，由公式(4.4－3)可知共轭于非渐近方向 $l:m$ 的直径的方程为

$$\frac{l}{a^2}x+\frac{m}{b^2}y=0$$

同样可求双曲线共轭于非渐近方向 $l:m$ 的直径方程为

$$\frac{l}{a^2}x-\frac{m}{b^2}y=0$$

显然，椭圆和双曲线的直径都过它们的中心(0,0).

由于两直径 $y=kx$ 与 $y=k'x$ 的方向分别为

$$l:m=\frac{1}{k},l':m'=\frac{1}{k'}$$

它们为椭圆的一对共轭方向的充分必要条件为(4.4－6)式成立，即

$$\frac{1}{a^2}ll'+\frac{1}{b^2}mm'=0 \qquad 或$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}kk'=0, \quad kk'=-\frac{b^2}{a^2}$$

同理可证 $y=kx$ 与 $y=k'x$ 是双曲线的一对共轭直径的充分必要条件为 $kk'=\frac{b^2}{a^2}$.

例 2 求抛物线 $y^2=2px$ 共轭于非渐近方向 $l:m$ 的直径.

解 对抛物线，$F_1(x,y)=p$，$F_2(x,y)=-y$，由公式(4.4－3)可知，抛物线共轭于非渐近方向 $l:m$ 的直径方程为

$$lp-my=0$$

即
$$y=\frac{1}{m}p$$

可见抛物线 $y^2=2px$ 的所有直径都平行于它的渐近方向 1：0，即平行于它的对称轴.

例 3 求二次曲线 $x^2-4xy+4y^2+2x-4y+3=0$ 的共

轭于非渐近方向 $l:m$ 的直径.

解法一 由于$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$,所以此曲线是线心二次曲线. 由定理 4.4.3 可知,此二次曲线的直径仅有一条,即为此线心二次曲线的中心直线

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{23}=0$$

即
$$x-2y+1=0$$

解法二 由于

$$F_1(x,y)=x-2y+1$$

$$F_2(x,y)=-2x+4y-2$$

所以由公式(4.4－3)可知所求直径方程为

$$l(x-2y+1)+m(-2x+4y-2)=0$$

即
$$(l-2m)(x-2y+1)=0$$

另外,可求此二次曲线的渐近方向为 2∶1,所以对非渐近方向 $l:m$ 有 $l\neq 2m$,故

$$x-2y+1=0$$

为所求直径方程,此二次曲线仅有这一条直径.

例 4 已知椭圆$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{18}=1$ 的一对共轭直径间的夹角为$\frac{\pi}{4}$,求这对共轭直径的方程.

解 由于椭圆的中心为坐标原点,因此可设 $y=kx$ 与 $y=k'x$ 为椭圆的一对共轭直径,且它们的夹角为$\frac{\pi}{4}$.

由例 1 可知

$$kk'=-\frac{18}{3}=-6$$

由夹角公式有

$$1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{k'-k}{1+kk'}$$

由上面两式可得

$$k^2-5k+6=0$$

由此得到 $k=2$ 或 $k=3$.

当 $k=2$ 时，$k'=-3$，当 $k=3$ 时，$k'=-2$，故求的一对共轭直径方程为 $y=2x$ 与 $y=-3x$，或 $y=3x$ 与 $y=-2x$.

二、二次曲线的主直径

定义 4.4.3 若二次曲线的一个非渐近方向与它的共轭方向垂直，则称这个方向为二次曲线的主方向，与主方向共轭的直径称为二次曲线的主直径. 主直径与二次曲线的交点叫做二次曲线的顶点.

根据定义可知，二次曲线的一组垂直于主直径的弦被主直径所平分，因此二次曲线的主直径是二次曲线的对称轴，也称为二次曲线的轴. 另外，对中心二次曲线，二个非渐近方向共轭是相互的，所以中心二次曲线的主方向是成对出现的，从而主直径也是成对出现的. 比如椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两非渐近方向 $1:0$ 与 $0:1$ 是相互共轭、相互垂直的，因此这两个方向是椭圆的两个主方向，与这两个主方向共轭的直径为 y 轴与 x 轴，是椭圆的两个主直径，主直径与椭圆的四个交点为椭圆的顶点.

下面研究如何确定二次曲线 Γ

$$F(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

的主方向与主直径.

设 $l:m$ 是二次曲线 Γ 的一个非渐近方向，其共轭方向为 $l':m'$，即

$$l':m'=-(a_{12}l+a_{22}m):(a_{11}l+a_{12}m) \qquad (4.4-9)$$

那么 $l:m$ 是二次曲线 Γ 的主方向的充分必要条件是方向 $l:m$ 与方向 $l':m'$ 垂直，即

$$l':m' = -m:l \tag{4.4-10}$$

由(4.4—9)与(4.4—10)可知，$l:m$ 是二次曲线 Γ 的主方向的充分必要条件为

$$m:l = (a_{12}l + a_{22}m):(a_{11}l + a_{12}m) \tag{4.4-11}$$

即存在不为零的实数 λ，使

$$\begin{cases} a_{11}l + a_{12}m = \lambda l \\ a_{12}l + a_{22}m = \lambda m \end{cases} \tag{4.4-12}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)l + a_{12}m = 0 \\ a_{12}l + (a_{22} - \lambda)m = 0 \end{cases} \tag{4.4-12'}$$

上面说明方向 $l:m$ 是二次曲线 Γ 的主方向的充分必要条件为 l、m 是方程组(4.4—12′)的解. 由于 l、m 不全为零，那么(4.4—12′)有非零解的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.4-13}$$

即

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0 \tag{4.4-14}$$

其中 $I_1 = a_{11} + a_{22}, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$

定义 4.4.4 方程(4.4—14)称为二次曲线 Γ 的特征方程，它的根称为二次曲线 Γ 的特征根.

下面通过对特征方程(4.4—14)根的个数的讨论，了解和确定二次曲线 Γ 的主方向.

由于特征方程(4.4—14)的判别式为

$$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$$

$$=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2\geqslant 0$$

所以，特征方程(4.4—14)的根都是实数.

(1)若二次曲线为中心曲线，那么$I_2\neq 0$，特征方程(4.4—14)的根皆不为零.

当 $\Delta=0$，即 $a_{11}=a_{22}$、$a_{12}=0$ 时，特征方程(4.4—14)有二重根 $\lambda_1=\lambda_2=a_{11}=a_{22}$，这时方程(4.4—12′)成为恒等式，因此任何方向 $l:m$ 皆满足方程(4.4—12′)，故任何方向都是二次曲线的主方向. 对原方程经配方可知，这时二次曲线为圆. 反之，若二次曲线为圆，必有 $a_{11}=a_{22}$，$a_{12}=0$，从而 $\Delta=0$.

当 $\Delta\neq 0$ 时，即 $a_{11}\neq a_{22}$或 $a_{12}\neq 0$ 至少有一个成立，这时特征方程(4.4—14)有两个不同的非零实根 λ_1、λ_2，将它们分别代入(4.4—12′)，得到二次曲线的两个主方向：

$$l_1:m_1=-a_{12}:(a_{11}-\lambda_1)=-(a_{22}-\lambda_1):a_{12}$$
$$l_2:m_2=-a_{12}:(a_{11}-\lambda_2)=-(a_{22}-\lambda_2):a_{12}$$

由
$$a_{12}(a_{22}-\lambda_2)+a_{12}(a_{11}-\lambda_1)$$
$$=a_{12}[a_{11}+a_{22}-(\lambda_1+\lambda_2)]=0$$

有
$$l_1l_2+m_1m_2=0$$

所以，这两个主方向是互相垂直的.

(2)若二次曲线为非中心曲线，那么$I_2=0$，从而特征方程(4.4—14)至少有一个零根，故可以断言方程(4.4—14)必有一个根不为零，否则有

$$I_1=a_{11}+a_{22}=0$$
$$I_2=a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2=0$$

因此，$I_1{}^2-2I_2=(a_{11}+a_{22})^2-2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=0$

即 $$a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{12}^2 = 0$$

由于 a_{ij} 皆为实数，所以 $a_{11}=a_{22}=a_{12}=0$，这与曲线是二次曲线相矛盾. 故此时特征方程(4.4—14)只有一个非零根 λ，将 λ 代入(4.4—12′)，得到非中心曲线唯一的一个主方向.

因为非中心曲线的任何非渐近方向的共轭方向总是它的唯一的渐近方向：

$$l_1 : m_1 = -a_{12} : a_{11} = a_{22} : (-a_{12})$$

所以，渐近方向 $l_1 : m_1$ 即为非中心二次曲线的主直径的方向，故与渐近方向 $l_1 : m_1$ 垂直的方向：

$$l_2 : m_2 = a_{11} : a_{12} = a_{12} : a_{22} \qquad (4.4-15)$$

即为非中心二次曲线的唯一的一个主方向.

综上所述，可得到：

定理 4.4.4 非圆的中心二次曲线有两个互相垂直的主方向，圆的每个方向都是主方向；非中心二次曲线只有一个主方向，即与它的唯一渐近方向垂直的方向即为主方向.

由此可得到下面的推论：

推论 4.4.1 非圆中心二次曲线有两个互相垂直的主直径，圆的每个直径都是主直径；非中心二次曲线只有一个主直径，其方向平行于曲线的唯一的渐近方向.

根据上面的结论和分析，归纳出求二次曲线主方向与直径的具体方法：

(1)写出二次曲线的特征方程(4.4—14)，并求出它的非零根；

(2)将方程(4.4—14)的非零根分别代入式(4.4—12′)，便得出二次曲线的主方向(其中当方程(4.4—14)有二重根时，任何方向都是主方向；当方程(4.4—14)只有一个非零根时，二次曲线的唯一的渐近方向即为主方向)；

(3)求出与主方向共轭的直径即为主直径．

例 5 求二次曲线 $x^2+4xy-2y^2-4x-6y+3=0$ 的主方向与主直径.

解 因为 $I_1=1-2=1, I_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-6$,所以曲线为中心曲线,其特征方程为

$$\lambda^2+\lambda-6=0$$

解此方程得到两特征根为

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=-3$$

由特征根 $\lambda_1=2$ 所确定的主方向为

$$l_1:m_1=-a_{12}:(a_{11}-\lambda_1)=-2:(1-2)=2:1$$

由特征根 $\lambda_2=-3$ 所确定的主方向为

$$l_2:m_2=(-a_{12}):(a_{11}-\lambda_2)$$
$$=(-2):(1+3)=(-1):2$$

又因为 $F_1(x,y)=x+2y-2, F_2(x,y)=2x-2y-3$

所以,曲线的两个主直径为

$$2F_1(x,y)+F_2(x,y)=0$$
$$-F_1(x,y)+2F_2(2,y)=0$$

即 $4x+2y-7=0$ 与 $3x-6y-4=0$

例 6 求二次曲线 $x^2-2xy+y^2-4x+2y-5=0$ 的主方向与主直径.

解法一 因为 $I_1=1+1=2, I_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0$,所以曲线为非中心曲线,它的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda=0$$

它的两特征根为

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=0$$

所以，曲线只有一个主方向，且由非零特征根 $\lambda_1=2$ 所确定，即

$$l_1 : m_1 = (-a_{12}) : (a_{11} - \lambda_1) = 1 : (1-2) = (-1) : 1$$

主直径为

$$-F_1(x,y) + F_2(x,y) = 0$$

$$-(x-y-2) + (-x+y+1) = 0$$

即

$$2x - 2y - 3 = 0$$

解法二 由于 $I_2=0$，因此二次曲线为非中心曲线，由方程

$$\Phi(l,m) = l^2 - 2lm + m^2 = 0$$

解得渐近方向为

$$l : m = 1 : 1$$

由定理 4.4.3 可知与此渐近方向垂直的方向

$$l_1 : m_1 = (-1) : 1$$

即为二次曲线的主方向. 二次曲线的主直径的求法同上.

习 题 4.4

1. 已知二次曲线 $3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0$，求它的

(1)与方向 1 : 0 平行的弦的中点的轨迹；

(2)与方向 0 : 1 平行的弦的中点的轨迹；

(3)与直线 $x+y+1=0$ 平行的弦的中点的轨迹.

2. 已知二次曲线 $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$ 的一直径过点 $(1,-2)$，求此直径及其共轭直径的方程.

3. 求二次曲线 $2x^2+4xy+5y^2-8x+6=0$ 的与直线 $2x-y+5=0$ 平行的直径的方程.

4. 求二次曲线 $xy-y^2-2x+3y-1=0$ 与方向 $-1:1$ 共轭的直径的方程.

5. 已知双曲线 $x^2-y^2=1$ 的两条共轭直径之间的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，求这两条共轭直径的方程.

6. 求两条二次曲线 $x^2-xy-y^2-x-y=0$ 与 $x^2+2xy-x+y=0$ 的公共直径的方程.

7. 已知二次曲线过点(1,1)，且以下列两对直线

$$\begin{cases} 2x-3y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \text{和} \begin{cases} x-y=0 \\ 3x-5y=0 \end{cases}$$

为它的两对共轭直径，求二次曲线的方程.

8. 求双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 与抛物线 $y^2=2px$ 的主方向与主直径.

9. 求下列二次曲线的主方向和主直径.

(1) $3x^2+2xy+3y^2+6x-2y-5=0$;

(2) $x^2-3xy+y^2+1=0$;

(3) $x^2-2xy+y^2+x-2y+3=0$;

(4) $x^2+y^2-6x+4y+2=0$;

(5) $x^2-2xy+y^2-12=0$.

10. 直线 $x+y+1=0$ 是二次曲线的主直径(即对称轴)，点(0,0)、(1,−1)、(2,1)在曲线上，求这二次曲线方程.

11. 证明外切于椭圆的一平行四边形的对角线是这个椭圆的一对共轭直径.

12. 设 POP'、QOQ' 是双曲线的任意一对共轭直径，其中 P、P' 和 Q、Q' 分别是两共轭直径与双曲线和它的共轭双曲线的交点. 试证以 OP、OQ 为两边的平行四边形的面积为定值.

§4.5 利用坐标变换化简一般二次曲线方程

在不同的坐标系下，平面上一点的坐标、一条曲线的方程是不同的. 因此，本节将要解决这样一个问题：如何利用坐标变换(即坐标轴的平移和旋转)，将一般二次曲线方程化成最

简形式，借以确定曲线的形状和位置.

一、坐标变换

1. 坐标轴的平移

只改变坐标原点的位置，而不改变坐标轴的方向与长度单位，这样的坐标变换叫做坐标轴的平移，简称平移或移轴.

将旧坐标系 oxy 平行移动到 $o'x'y'$，那么平面上任一点 M 在旧坐标系与新坐标系的坐标 (x,y) 和 (x',y') 具有关系

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \tag{4.5-1}$$

其中 (x_0,y_0) 是新坐标系中的原点 o' 在旧坐标系里的坐标.

公式(4.5—1)叫做平移变换公式，它也可写成

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \tag{4.5-1'}$$

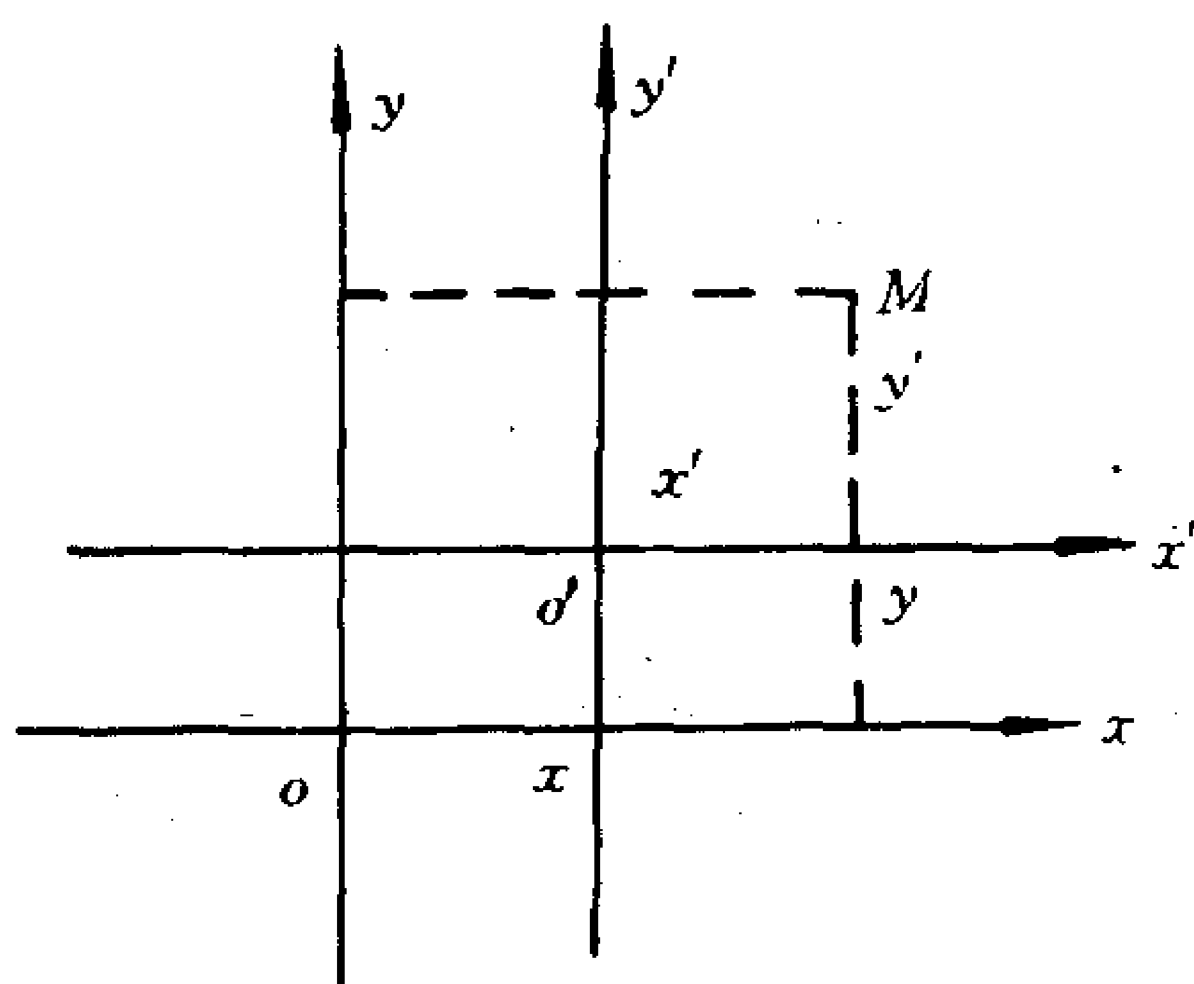


图 4—2

现在来讨论在平移变换下，二次曲线方程的系数将发生怎样的变化. 将公式(4.5—1)代入二次曲线的一般方程，得二次曲线在新坐标系下的方程为

$$F(x'+x_0,y'+y_0) \equiv a_{11}(x'+x_0)^2 + 2a_{12}(x'+x_0)(y'+y_0) + a_{22}(y'+y_0)^2 + 2a_{13}(x'+x_0) + 2a_{23}(y'+y_0) + a_{33} = 0$$

即

$$a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33}' = 0$$

其中

$$
\begin{cases}
a_{11}' = a_{11}, a_{12}' = a_{12}, a_{22}' = a_{22} \\
a_{13}' = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = F_1(x_0, y_0) \\
a_{23}' = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = F_2(x_0, y_0) \\
a_{33}' = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + \\
2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = F(x_0, y_0)
\end{cases}
\tag{4.5-2}
$$

由此得到在平移变换下，二次曲线方程的系数变化规律：

(1)二次项系数不变；

(2)一次项系数变为 $2F_1(x_0, y_0)$，$2F_2(x_0, y_0)$；

(3)常数项变为 $F(x_0, y_0)$.

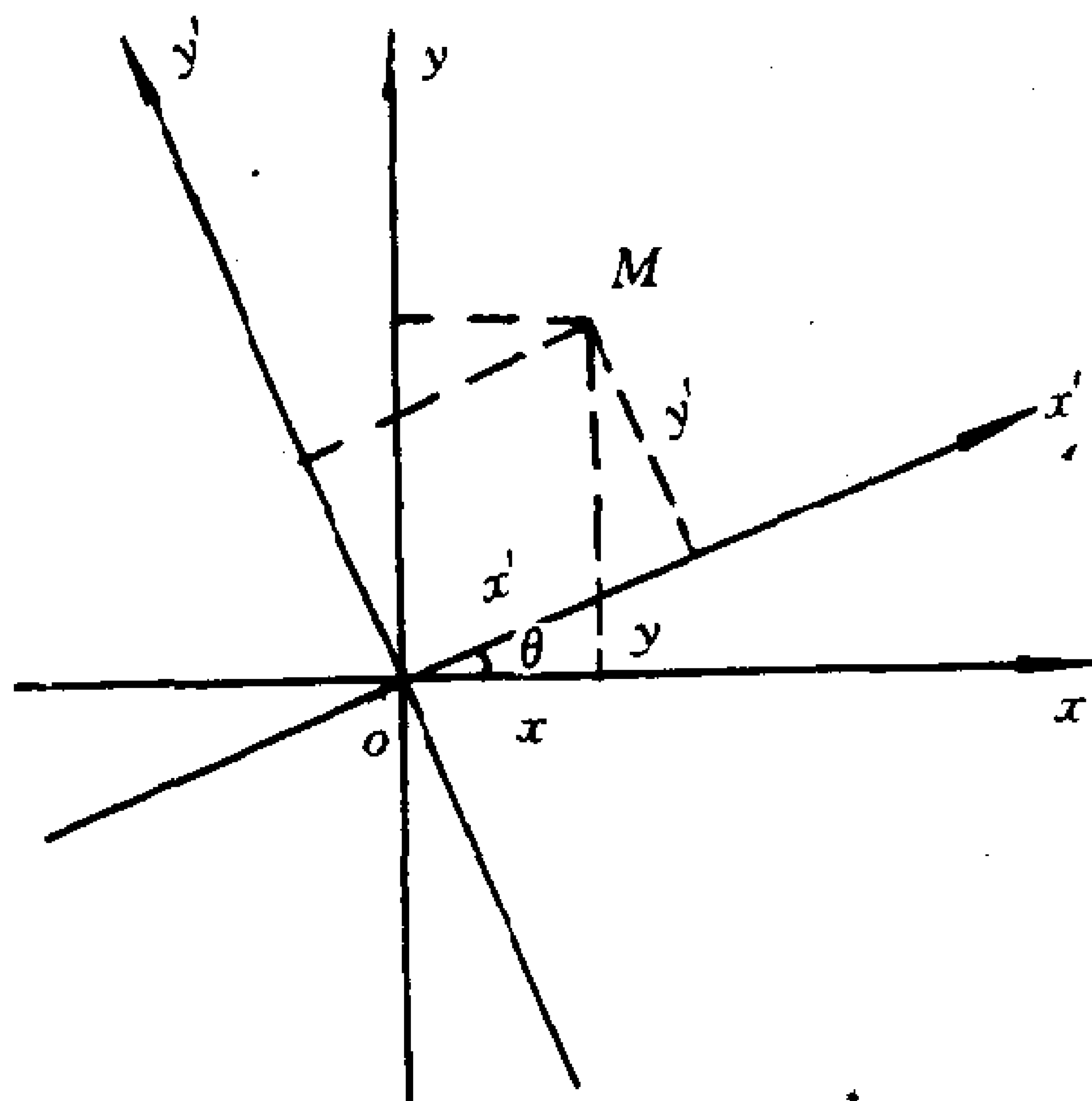


图 4—3

其中 (x_0, y_0) 是新坐标系的原点在旧坐标系里的坐标. 当 (x_0, y_0) 为二次曲线的中心时，有 $F_1(x_0, y_0) = F_2(x_0, y_0) = 0$. 因此，当二次曲线有中心时，作移轴变换，使新坐标系的原点与二次曲线的中心重合，那么在新坐标系下，二次曲线的新方程中没有一次项.

2. 坐标轴的旋转

坐标原点的位置和长度单位都不改变，让坐标轴绕原点按同一方向旋转同一个角度，这种坐标变换叫做坐标轴的旋转，简称旋转或转轴.

见图 4—3，把旧坐标系 oxy 绕原点 o 旋转同一个角度 θ 到 $o'x'y'$，那么平面上任一点 M 在旧坐标系与新坐标系下的

坐标(x,y)与(x',y')之间具有关系

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \qquad (4.5-3)$$

公式(4.5－3)叫做旋转变换公式.公式(4.5－3)也可写成

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \qquad (4.5-3')$$

公式(4.5－3′)可这样记忆,在公式(4.5－3)中,x 与 x'、y 与 y'互换,并以$-\theta$ 代 θ,便得到公式(4.5－3′).

现在再来讨论在旋转变换下,二次曲线方程的系数将发生怎样的变化.将公式(4.5－3)代入二次曲线的一般方程,得到二次曲线在新坐标系下的方程为

$$\begin{aligned} & a_{11}(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + 2a_{12}(x'\cos\theta - y'\sin\theta) \\ & (x'\sin\theta + y'\cos\theta) + a_{22}(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 \\ & + 2a_{13}(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + 2a_{23}(x'\sin\theta + y'\cos\theta) \\ & + a_{33} = 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & a'_{11}x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 + 2a_{13}'x' \\ & + 2a_{23}'y' + a_{33}' = 0 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} a_{11}' = a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta \\ a_{12}' = (a_{22} - a_{11})\sin\theta\cos\theta + a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ a_{22}' = a_{11}\sin^2\theta - 2a_{12}\sin\theta\cos\theta + a_{22}\cos^2\theta \\ a_{13} = a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta \\ a_{23}' = -a_{13}\sin\theta + a_{23}\cos\theta \\ a_{33}' = a_{33} \end{cases} \qquad (4.5-4)$$

由此得到,在旋转变换下,二次曲线方程系数的变化规律:

(1)二次项系数一般要改变,新方程的二次项系数仅与原

方程的二次项系数及旋转角 θ 有关，而与一次项系数及常数项无关.

(2)一次项系数一般要改变，新方程的一次项系数仅与原方程中的一次项系数及旋转角 θ 有关，与二次项系数及常数项无关.

由(4.5—4)中的第四、五两式可得

$$\begin{cases} a_{13} = a_{13}'\cos\theta - a_{23}'\sin\theta \\ a_{23} = a_{13}'\sin\theta + a_{23}'\cos\theta \end{cases} \tag{4.5 - 5}$$

由(4.5—4)中的第四、五两式及(4.5—5)可知，当原方程中有一次项时，通过转轴不能完全消去一次项，当原方程中无一次项时，通过转轴不会产生一次项.

(3)常数项不变.

当 $a_{12} \neq 0$ 时，分析怎样通过转轴来消去交叉乘积项 xy. 为此，需要通过旋转一个适当的角度 θ，使新方程中的 $a_{12}' = 0$，即

$$a_{12}' = (a_{22} - a_{11})\sin\theta\cos\theta + a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\sin 2\theta + a_{12}\cos 2\theta = 0$$

上式成立当且仅当

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \tag{4.5 - 6}$$

由于余切的值可取任何实数，所以满足(4.5—6)的 θ 一定存在，这说明总可经过适当的转轴消去二次曲线方程中的 xy 项，并且只要旋转角 θ 满足(4.5—6)式便可达到这一目的.

在旋转变换公式中，需要求出 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 的值，如果满足(4.5—6)式的 θ 是特殊角，则 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 的值可直接写出；如果满足(4.5—6)式的 θ 不是特殊角，则可由(4.5—6)中的 $\operatorname{ctg} 2\theta$ 的值和下面的三角公式(4.5—7)求出 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$

的值，即

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \dfrac{\operatorname{ctg} 2\theta}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\theta}} \\ \sin\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}} \\ \cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}} \end{cases} \qquad (4.5-7)$$

这里需要指出的是，(4.5－7)中的三个公式的右边根式前都应带有“±”号，但取适合于公式(4.5－6)的 2θ 的最小正值，就是使 $0<2\theta<\pi$，从而 $\cos 2\theta$ 与 $\operatorname{ctg} 2\theta$ 的符号相同，这时 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 都是正值，因此(4.5－7)中三式的根号前都取正号.

二、用坐标变换化简中心二次曲线方程

用坐标变换化简中心二次曲线方程的方法是：先通过移轴消去方程中的一次项，然后再通过适当的转轴消去方程中的交叉乘积项.

当然，也可以先转轴消去方程中的交叉乘积项，然后通过移轴消去方程中的一次项来化简中心二次曲线方程. 但是后种方法不如前种方法简便.

用坐标变换化简中心二次曲线的几何意义是什么？前面已经知道，如果把坐标原点移到二次曲线的中心，那么在新坐标系 $o'x'y'$ 下，中心二次曲线方程中不含一次项，如果再旋转坐标轴，使坐标轴与中心二次曲线的两条互相垂直的主直径(即对称轴)重合，于是中心二次曲线在新坐标系 $o''x''y''$ 下关于横轴和纵轴对称，从而其方程不含交叉乘积项. 由此可见，用坐标变换化简中心二次曲线方程，就是选择中心二次曲线两条互相垂直的主直径为坐标轴，在此坐标系下，中心二次曲线方程具有最简形式.

例1 化简二次曲线方程

$$5x^2-6xy+5y^2-6\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y-4=0,$$

并作出它的图形.

解 因为 $I^2=\begin{vmatrix}5 & -3\\ -3 & 5\end{vmatrix}=16\neq 0$，所以曲线为中心二次曲线.

解方程组 $\begin{cases}F_1(x,y)=5x-3y-3\sqrt{2}=0\\ F_2(x,y)=-3x+5y+\sqrt{2}=0\end{cases}$

得 $$x=\frac{3}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

二次曲线的中心为$\left(\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

先作移轴变换：

$$\begin{cases}x=x'+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\\ y=y'+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

代入原方程(或只需计算 $F\left(\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=-8$)，得

$$5x'^2-6x'y'+5y'-8=0 \qquad (4.5-8)$$

再作转轴变换消去 x'、y'项. 由于

$$\operatorname{ctg}2\theta=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}=0$$

得 $\theta=\frac{\pi}{4}$，故转轴公式为

$$\begin{cases}x'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x''-y'')\\ y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x''+y'')\end{cases}$$

代入方程(4.5—8),得

$$x''^2 + 4y''^2 - 4 = 0$$

即

$$\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{1} = 1$$

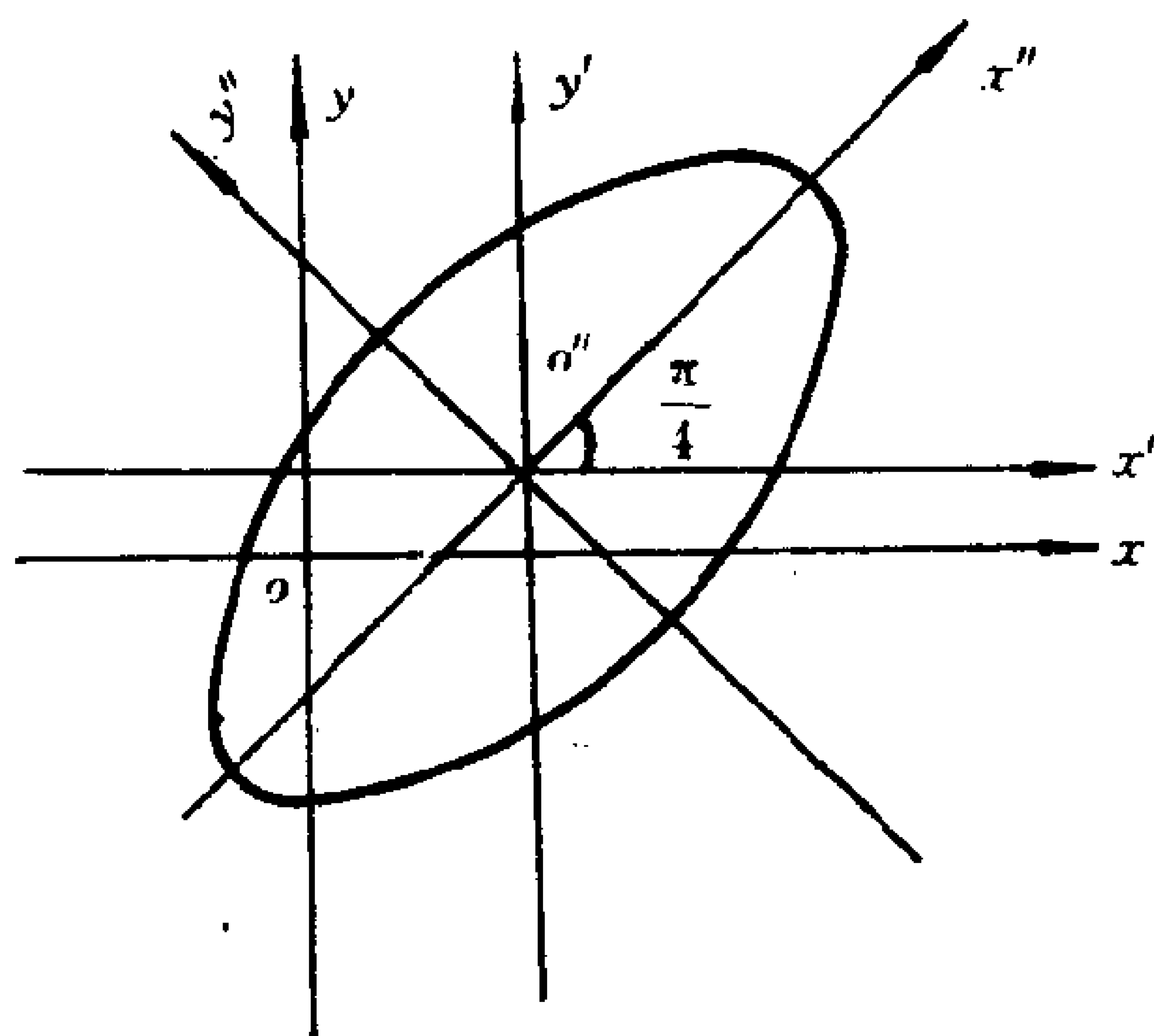


图 4—4

二次曲线为椭圆,见图4—4.

例2 化简二次曲线方程

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0,$$

并作出它的图形.

解 因为$I_2=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=-9\neq 0$,所以曲线为中心二次曲线.

解方程组$\begin{cases} F_1(x,y)=3y-6=0 \\ F_2(x,y)=3x+8y-13=0 \end{cases}$

得$x=-1, y=2$,故二次曲线的中心为$(-1,2)$.

先作移轴变换:

$$\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 2 \end{cases}$$

代入原方程(或只要计算$F(-1,2)=-9$)得

$$6x'y' + 8y'^2 - 9 = 0 \qquad (4.5-10)$$

再作转轴变换消去 x'、y' 项．由于

$$\operatorname{ctg}2\theta = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = -\frac{4}{3}$$

$$\cos 2\theta = \frac{\operatorname{ctg}2\theta}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\theta}} = -\frac{4}{5}$$

$$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

转轴变换公式为：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x'' - 3y'') \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x'' + y'') \end{cases}$$

代入方程(4.5－10)，得

$$9x''^2 - y''^2 - 9 = 0,$$

即 $x''^2 - \dfrac{y''^2}{9} = 1$，曲线为双曲线，见图 4－5.

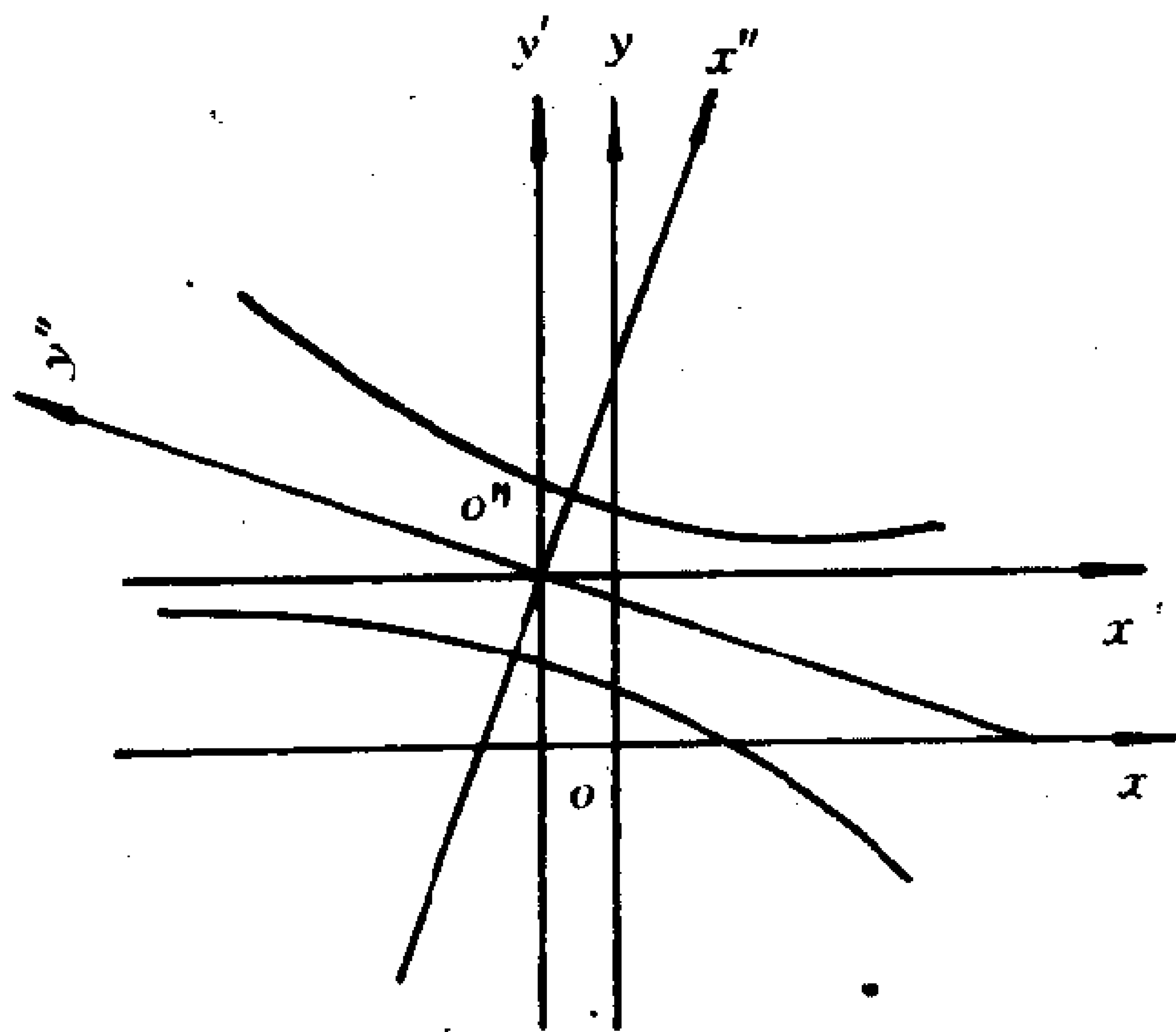


图 4－5

小结

用坐标变换化简中心型二次曲线方程的过程是：

1° 解方程组$\begin{cases}F_1(x,y)=0\\F_2(x,y)=0\end{cases}$，求出中心$(x_0,y_0)$；

2° 作移轴$\begin{cases}x=x'+x_0\\y=y'+y_0\end{cases}$，消去一次项．这时只需计算常数项 $a'_{33}=F(x_0,y_0)$；

3° 由$\operatorname{ctg}2\theta=\dfrac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$，对特殊角求出$\theta$．一般地，可按(4.5－7)式求出 $\sin\theta$、$\cos\theta$、也可由倍角公式将上式转化为$\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{2\operatorname{tg}\theta}=\dfrac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$，求出 $\operatorname{tg}\theta$ 的值．在此 $\operatorname{tg}\theta$ 有两个值互为负倒数，取其正值，再求 $\sin\theta$、$\cos\theta$，也取正值．保证转角为锐角，以利画图．

4° 作转轴$\begin{cases}x'=x''\cos\theta-y''\sin\theta\\y'=x''\sin\theta+y''\cos\theta\end{cases}$，消去交叉乘积项．这时一般采用代入化简．

三、用坐标变换化简非中心二次曲线方程

用坐标变换化简非中心二次曲线方程的方法是：先通过转轴消去交叉乘积项 xy，然后再通过移轴将方程化成最简形式．

需要特别指出的是，对非中心二次曲线不能采用先移轴后转轴的方法化简其方程．比如对无心二次曲线，不可能通过移轴同时消去两个一次项 x 与 y，这时就看不出应该通过移轴消去 x 项还是 y 项．

例 3 化简二次曲线方程

$$x^2-4xy+4y^2-6\sqrt{5}x-8\sqrt{5}y-35=0,$$

并作出它的图形．

解 因为 $I_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=0$，所以二次曲线为非中心曲线，且是无心曲线($I_3\neq 0$).

先作转轴变换消去 xy 项.

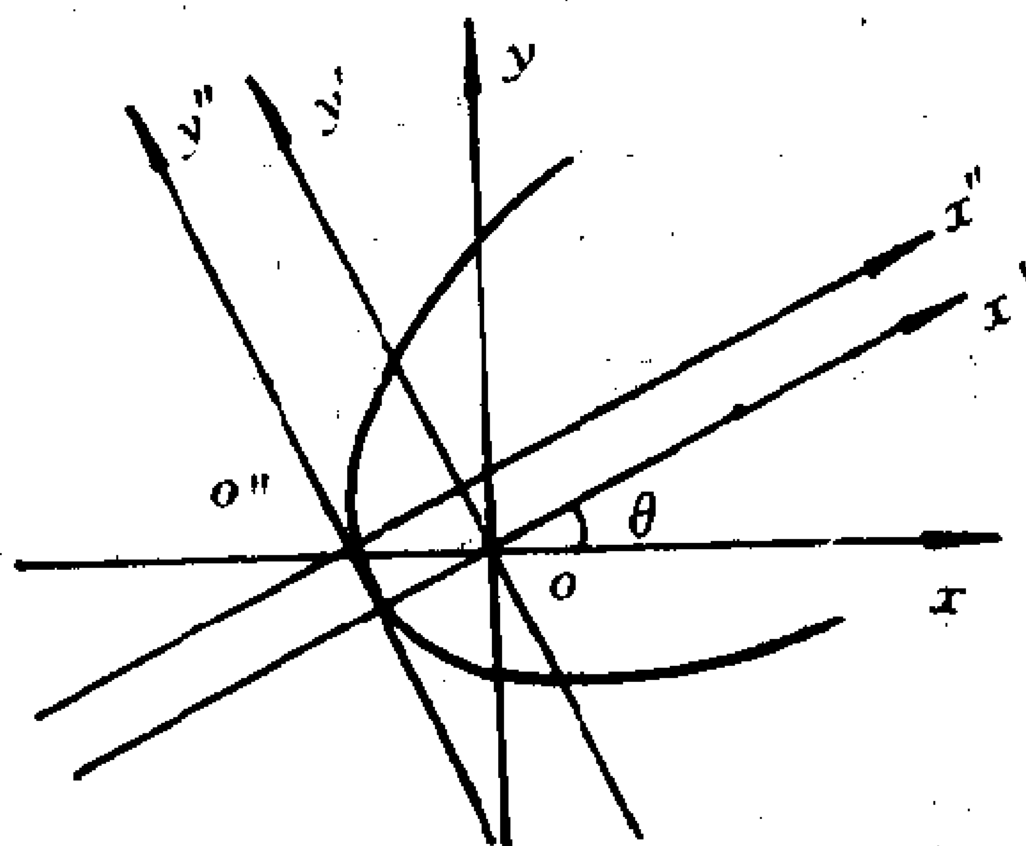


图 4-6

由于

$$\operatorname{ctg}2\theta=\frac{1-4}{-4}=\frac{3}{4}$$

故 $$\cos 2\theta=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}}=\frac{3}{5}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

转轴变换公式为

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x'-y') \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y') \end{cases}$$

代入原方程得

$$y'^2-4x'-2y'-7=0$$

配方得 $$(y'-1)^2=4(x'+2) \qquad (4.5-11)$$

再作移轴变换：

$$\begin{cases} x''=x'+2 \\ y''=y'-1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x'=x''-2 \\ y'=y''+1 \end{cases}$$

代入(4.5－11) 得

$$y''^2=4x''$$

曲线为抛物线，见图 4－6.

评注 由此例可见，用坐标变换化简无心二次曲线方程的几何意义是：取无心二次曲线唯一的一条主直径为一坐标轴，并取无心二次曲线唯一的顶点为坐标原点，在此新坐标系之下，无心二次曲线的方程具有最简形式.

例 4 化简二次曲线方程

$$x^2-2xy+y^2+2x-2y-3=0,$$

并作出它的图形.

解 因为 $I_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}=0$，所以曲线为非中心二次曲线，进而可知它是线心二次曲线($I_3=0$).

先作转轴变换消去 xy 项，由

$$\operatorname{ctg}2\theta=\frac{1-1}{2}=0$$

取 $\theta=\frac{\pi}{4}$，于是转轴变换公式为

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')\end{cases}$$

代入原方程得 $y'^2+\sqrt{2}y-\frac{3}{2}=0$

配方得 $$(y'+\frac{\sqrt{2}}{2})^2=4 \qquad (4.5-12)$$

再作移轴变换：

$$\begin{cases}x'=x''\\ y'=y''-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

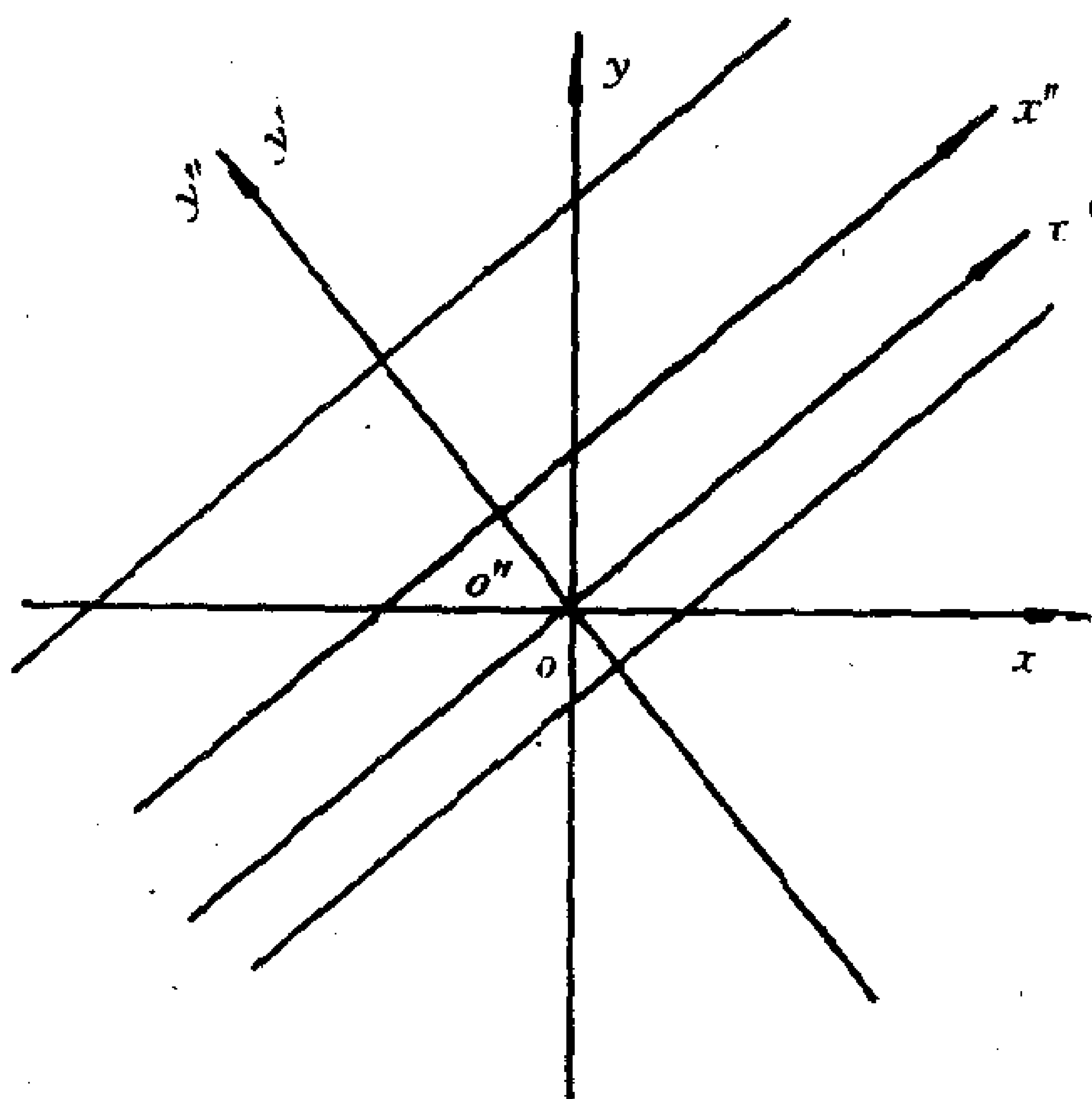


图 4—7

代入(4.5 — 12)得

$$y''^2 = 4$$

即

$$y = \pm 2$$

曲线为两条平行的直线，见图 4—7.

评注 由此例可见，用坐标变换化简线心二次曲线方程的几何意义是：取线心二次曲线唯一的一条主直径（即中心直线）为一坐标轴，主直径上任一点为坐标原点，在此新坐标系之下，线心二次曲线的方程具有最简形式.

四、用坐标变换对一般二次曲线分类

最后，利用坐标变换来讨论二次曲线的类型. 一般地，利用坐标变换化简二次曲线方程有这样的结论：

定理 4.5.1 经适当选择坐标系，那么

1° 中心二次曲线方程可化简成

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \quad (a_{11}a_{22} \neq 0)$$

2° 无心二次曲线方程可化简成

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0 \quad (a_{22}a_{13} \neq 0)$$

3° 线心二次曲线方程可化简成

$$a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \quad (a_{22} \neq 0)$$

证明 1° 当二次曲线为中心曲线时，取它的两条互相垂直的主直径为坐标轴建立直角坐标系，这时坐标原点为二次曲线的对称中心，由推论 4.3.1 可知，在此坐标系下，中心二次曲线方程中不含一次项，故可设二次曲线在此坐标系下的方程为

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \quad (4.5-13)$$

又因为二次曲线的主直径就是它的对称轴，因此二次曲线关于 x 轴（或 y 轴）对称. 设 (x, y) 是二次曲线上任一点，那么此点关于 x 轴的对称点 $(x, -y)$ 也在曲线上，从而有

$$a_{11}x^2 - 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \quad (4.5-14)$$

(4.5－13)与(4.5－14)两式相减，得

$$a_{12}xy = 0 \quad (4.5-15)$$

中心二次曲线上的每一点 (x, y) 的坐标都满足上式，则必有 $a_{12}=0$.

另外，$I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a_{11}a_{22} \neq 0$，故中心二次曲线方程可化简成

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \quad (a_{11}a_{22} \neq 0) \quad (4.5-16)$$

2° 当二次曲线为无心二次曲线时，取它的唯一的主直径为 x 轴，顶点（主直径与曲线的交点）为坐标原点建立直角坐标系. 设曲线在此坐标下的方程为

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (4.5-17)$$

因为，这时无心二次曲线的直径

$$a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

即为 x 轴：$y=0$，所以有

$$a_{12} = a_{23} = 0, a_{22} \neq 0$$

又因为曲线的顶点(0,0)在曲线上，从而又有

$$a_{33} = 0$$

另外，由于曲线为无心曲线，所以

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$$

而 $a_{12}=0, a_{22}\neq 0$，所以有

$$a_{11} = 0, a_{13} \neq 0$$

故无心二次曲线方程可化简成

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0 \quad (a_{22}、a_{13} \neq 0) \quad (4.5-18)$$

3° 当二次曲线为线心二次曲线时，取它唯一的一条主直径(即中心直线)为 x 轴，主直径上任一点为坐标原点建立直角坐标系．设线心二次曲线在此坐标系下的方程为(4.5－17)．由于这时坐标原点是线心二次曲线的中心，由推论 4.3.1 可知，在此坐标系下，线心二次曲线的方程中不含一次项，故它的方程为

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

这时线心二次曲线的主直径(即中心直线)方程为

$$a_{11}x = 0 \qquad 或 \qquad a_{22}y = 0$$

而线心二次曲线的主直径为 x 轴，从而必有 $a_{11}=0, a_{22}\neq 0$. 故线心二次曲线方程可化简成

$$a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \qquad (a_{22} \neq 0)$$

利用定理 4.5.1，可将一般二次曲线分为下面 3 种类型，9 种曲线.

定理 4.5.2 适当选择坐标系，那么

1° 中心二次曲线方程可化简成下面 5 种标准方程之一：

(1)$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（椭圆）；

(2)$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$（虚椭圆）；

(3)$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$（点椭圆，或称变态椭圆）；

(4)$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（双曲线）；

(5)$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$（两条相交直线，或称变态双曲线）.

2° 无心二次曲线的标准方程为：

$$y^2 = 2px \quad \text{（抛物线）}$$

3° 线心二次曲线方程可化简成下面 3 种标准方程之一：

(1)$y^2=a^2$　（两平行直线）；

(2) $y^2=-a^2$　（两平行共轭虚直线）；

(3) $y^2=0$　（两重合直线）.

证明 1° 由定理 4.5.1 可设中心二次曲线方程为

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \quad (a_{11}a_{22} \neq 0) \tag{4.5-19}$$

当 $a_{33}\neq 0$ 时，方程(4.5－19)可化为

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1 \quad (\alpha\beta \neq 0)$$

如果 $\alpha>0$，$\beta>0$，令

$$\alpha = \frac{1}{a^2}, \beta = \frac{1}{b^2}$$

于是得方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{（椭圆）}$$

如果 $\alpha<0,\beta<0$，令

$$\alpha=-\frac{1}{a^2},\beta=-\frac{1}{b^2}$$

于是得方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1(\text{虚椭圆})$$

如果 α 与 β 异号，不失一般性，假设，$\alpha>0,\beta<0$（若 $\alpha<0$，$\beta>0$，将 ox 轴与 oy 轴对调），令

$$\alpha=\frac{1}{a^2},\beta=-\frac{1}{b^2}$$

于是得方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(\text{双曲线})$$

当 $a_{33}=0$ 时，且 a_{11} 与 a_{22} 同号，如果 $a_{11}>0,a_{22}>0$，则令 $a_{11}=\frac{1}{a^2},a_{22}=\frac{1}{b^2}$；如果 $a_{11}<0,a_{22}<0$，则令 $a_{11}=-\frac{1}{a^2},a_{22}=-\frac{1}{b^2}$，于是得方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0\quad(\text{点椭圆})$$

当 $a_{33}=0$，且 a_{11} 与 a_{22} 异号时，类似地可得方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\quad(\text{两相交直线})$$

关于无心二次曲线和线心二次曲线的讨论完全类似，这里把它留给读者完成.

习　题　4.5

1. 利用坐标变换把下列二次曲线方程化成标准形，并作出它们的图形：

(1) $x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0$;

(2) $9x^2-24xy+16y^2-40x-30y-50=0$;

(3) $x^2-2xy+y^2-12=0$;

(4) $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y+8=0$;

(5) $2x^2-xy-2y^2-6x-7y-4=0$;

(6) $4x^2-4xy+y^2+6x-8y+3=0$.

2. 证明不论 θ 为何值时，方程 $y^2-2x-6y\sin\theta-9\cos^2\theta+8\cos\theta+9=0$ 都表示顶点在同一椭圆上的抛物线.

3. 已知椭圆的长轴和短轴分别位于直线 $x+y-1=0$ 与 $x-y+1=0$ 上，且椭圆的长、短轴分别为 2 与 1，求椭圆方程.

4. 试证中心二次曲线

$$ax^2+2hxy+ay^2=d$$

的两条主直线为 $x^2-y^2=0$，且曲线的两半轴长分别为

$$\left|\frac{d}{a+h}\right|^{\frac{1}{2}} 与 \left|\frac{d}{a-h}\right|^{\frac{1}{2}}$$

§4.6 利用不变量化简一般二次曲线方程

一、不变量与半不变量

在§4.5中，解决了用坐标变换化简二次曲线方程的问题，本节将介绍化简二次曲线方程的另一种方法，即用不变量的方法化简二次曲线方程，借以确定曲线的类型和形状.

由前面已经知道，一般二次曲线方程，在移轴变换下，只有二次项系数保持不变，而在转轴变换下，只有常数项保持不变. 因此，在一般坐标变换下，方程的各项系数一般都要改变，这说明同一条曲线在不同的坐标系下具有不同的方程. 但是由方程系数决定的几何量（如椭圆的面积、焦距、长轴与短轴的长等）是不会随坐标系的更改而变化，称这些量为不变量.

确切地说，设已知二次曲线方程为

$$F(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (4.6-1)$$

在一般坐标变换下，

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta + x_0 \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta + y_0 \end{cases} \qquad (4.6-2)$$

曲线方程(4.6－1)变为

$$F'(x',y') \equiv a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33}' = 0 \qquad (4.6-3)$$

那么多项式 $F'(x',y')$ 也是二元二次多项式，它的每一个系数都可用多项式 $F(x,y)$ 的系数和坐标变换(4.6－2)的系数表出.

定义 4.6.1 由 $F(x,y)$ 的系数组成一个非常数函数 G，如果经过坐标变换(4.6－2)，$F(x,y)$ 变为 $F'(x',y')$ 时，有

$$G(a_{11},a_{12},\cdots a_{33}) = G(a_{11}',a_{12}'\cdots,a_{33}')$$

那么这个函数 G 叫做二次曲线(4.6－1)在坐标变换下的不变量. 如果这个函数 G 的值只是在转轴变换下不变，那么这个函数 G 叫做二次曲线(4.6－1)在坐标变换下的半不变量.

现在研究下面函数

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

定理 4.6.1 I_1、I_2、I_3 是二次曲线(4.6－1)在坐标变换下的不变量.

证明 因为一般坐标变换总可写成移轴变换(4.5—1)与转轴变换(4.5—3)两步来完成,因此只要证明 I_1、I_2、I_3 在移轴变换(4.5—1)下不变,在转轴变换(4.5—3)下也不变即可.

先证 I_1、I_2、I_3 在移轴变换(4.5—1)下不变.

在§4.5中已知道,二次曲线(4.6—1)的二次项系数在移轴变换(4.5—1)下不变,所以有

$$I_1' = a_{11}' + a_{22}' = a_{11} + a_{22} = I_1$$

$$I_2' = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{12}' & a_{22}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = I_2$$

另外,由公式(4.5—2),有

$$I_3' = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{12}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{13}' & a_{23}' & a_{33}' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & F_1(x_0,y_0) \\ a_{12} & a_{22} & F_2(x_0,y_0) \\ F_1(x_0,y_0) & F_2(x_0,y_0) & F(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

将上式右端的三阶行列式的第一行乘以 $-x_0$ 加到第三行,再将第二行乘以 $-y_0$ 加到第三行,得

$$I_3' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & F_1(x_0,y_0) \\ a_{12} & a_{22} & F_2(x_0,y_0) \\ a_{13} & a_{23} & F_3(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

在上式右端的三阶行列式中,将第一列乘以 $-x_0$ 加到第三列,再将第二列乘以 $-y_0$ 加到第三列,得

$$I_3' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = I_3$$

故 I_1、I_2、I_3 在移轴变换下不变.

下面再证 I_1、I_2、I_3 在转轴变换(4.5—3)下也不变.

根据公式(4.5—4),有

$$I_1' = a_{11}' + a_{22}' = a_{11}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + a_{22}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$= a_{11} + a_{22} = I_1$$

$$I_2' = a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2 = (a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta)$$
$$(a_{11}\sin^2\theta - 2a_{12}\sin\theta\cos\theta + a_{22}\cos^2\theta) - [(a_{22} - a_{11})\sin\theta\cos\theta$$
$$+ a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)]^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = I_2$$

$$I_3' = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{12}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{13}' & a_{23}' & a_{33}' \end{vmatrix}$$
$$= a_{13}'(a_{12}'a_{23}' - a_{22}'a_{13}') + a_{23}'(a_{12}'a_{13}' - a_{11}'a_{23}')$$
$$+ a_{33}'(a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2) \tag{4.6-4}$$

而 $\quad a_{33}' = a_{33}, a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2 = I_2' = I_2 = a_{11}a_{22}$

$$- a_{12}^2 a_{23}'(a_{12}'a_{13}' - a_{11}'a_{23}') = a_{23}'[(a_{22}a_{13} - a_{23}a_{12})\sin\theta$$
$$+ (a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})\cos\theta]a_{13}'(a_{12}'a_{23}' - a_{22}'a_{23}')$$
$$= a_{13}'[(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})\cos\theta + (a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})\sin\theta]$$

将上面式子代入式(4.6—4)得

$$I_3' = a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + (a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13})(a_{13}'\cos\theta$$
$$- a_{23}'\sin\theta) + (a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})(a_{13}'\sin\theta + a_{23}'\sin\theta) \tag{4.6-4'}$$

由公式(4.5—4)中的四、五两式得

$$a_{13} = a_{13}'\cos\theta - a_{23}'\sin\theta$$
$$a_{23} = a'_{13}\sin\theta + a'_{23}\cos\theta$$

$$\therefore I_3' = a_{13}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) + a_{23}(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = I_3$$

故 I_1、I_2、I_3 在转轴变换下也不变.

定理 4.6.2 K_1 是二次曲线(4.6—1)的半不变量(即在转轴变换下不变),当 $I_2=I_3=0$ 时,K_1 在移轴变换下也不变.

证明

$$\because \quad K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11} + a_{22})a_{33} - (a_{13}^2 + a_{23}^2)$$

而在转轴变换下 $a_{11}+a_{22}=a_{11}'+a_{22}'$,$a_{33}=a_{33}'$

另外,由公式(4.5—4)可得

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 = a_{13}'^2 + a_{23}'^2$$

$$\therefore K_1 = (a_{11}' + a_{22}')a_{33}' - (a_{13}'^2 + a_{23}'^2)$$

下面证明当 $I_2=I_3=0$ 时,K_1 在移轴变换下不变.

由公式(4.5—2)可知

$$K_1' = (a_{11}' + a_{22}')a_{33}' - (a_{13}'^2 + a_{23}'^2) = (a_{11} + a_{22})(a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}) - (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})^2 - (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})^2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(x_0^2 + y_0^2) + 2x_0(a_{13}a_{22} - a_{23}a_{12}) 2y_0(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12}) + (a_{11} + a_{22})a_{33} - (a_{13}^2 + a_{23}^2) \tag{4.6-4}$$

已知 $I_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 = 0,$$

从而有

$$a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 - 2a_{23}a_{13}a_{12} = 0 \quad (4.6-6)$$

下面只要证明

$$a_{12}a_{13} - a_{23}a_{12} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12} = 0 \quad (4.6-7)$$

便有

$$K_1' = (a_{11} + a_{22})a_{33} - (a_{13}^2 + a_{23}^2) = K_1$$

$$\because (a_{22}a_{13} - a_{23}a_{12})^2 = a_{22}^2a_{13}^2 + a_{23}^2a_{12}^2 - 2a_{22}a_{13}a_{23}a_{12}$$
$$= a_{22}^2a_{13}^2 + a_{11}a_{22}a_{23}^2 - 2a_{22}a_{13}a_{23}a_{12}$$
$$= a_{22}(a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 - 2a_{23}a_{13}a_{12}) = 0$$

$$(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12})^2 = a_{11}^2a_{23}^2 + a_{12}^2a_{13}^2 - 2a_{11}a_{23}a_{13}a_{12}$$
$$= a_{11}^2a_{23}^2 + a_{11}a_{22}a_{13}^2 - 2a_{11}a_{23}a_{13}a_{12}$$
$$= a_{11}(a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 - 2a_{23}a_{13}a_{12}) = 0$$

所以，式(4.6—7)成立，故当 $I_2 = I_3 = 0$ 时，K_1 在移轴变换下不变.

二、用不变量化简二次曲线方程

根据定理 4.5.1 可知，任何一个二次曲线方程总可以通过适当的坐标变换化成最简形式. 现应用二次曲线的不变量 I_1、I_2、I_3 与半不变量 K_1 来化简二次曲线方程，这种方法只需要计算不变量 I_1、I_2、I_3 与半不变量 K_1 值，便可达到化二次曲线方程为最简形式的目的. 以下分中心曲线、无心曲线与线心曲线三种情况来讨论.

1. 中心曲线

这时 $I_2 \neq 0$，它的方程可化简成

$$a_{11}'x'^2 + a_{22}'y'^2 + a_{33}' = 0$$

因此有

$$I'_1 = a_{11}' + a'_{22} = I_1$$

$$I_2' = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & a_{22}' \end{vmatrix} = a_{12}'a_{22}' = I_2$$

根据二次方程的根与系数之间的关系可知，a'_{11}与a'_{22}是特征方程

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0 \qquad (4.6-8)$$

的两根 λ_1、λ_2.

其次由于

$$I_3' = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}' & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}' \end{vmatrix} = a_{11}'a_{22}'a_{33}' = I_2 a_{33}'$$

而

$$I_3' = I_3$$

∴

$$a_{33}' = \frac{I_3}{I_2}$$

于是得到：

定理 4.6.3 如果二次曲线为中心曲线，那么它的方程可化简成

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \qquad (4.6-9)$$

其中 λ_1、λ_2 是二次曲线的特征方程(4.6−8)的两根，方程中的撇号已略去．方程(4.6−9)称为中心二次曲线的规范方程.

根据上面的讨论，可知利用不变量化简中心二次曲线方程的方法是：

(1) 计算出诸不变量 I_1、I_2、I_3；

(2) 求出特征方程(4.6−8)的两根 λ_1、λ_2；

(3) 写出它的规范方程(4.6−9).

例 1 求二次曲线

$$13x^2 + 10xy + 13y^2 + 46x + 62y + 13 = 0$$

的规范方程与标准方程.

解 $I_1 = 13 + 13 = 26$

$$\because\ I_2=\begin{vmatrix}13 & 5\\ 5 & 13\end{vmatrix}=144$$

$$I_3=\begin{vmatrix}13 & 5 & 23\\ 5 & 13 & 31\\ 23 & 31 & 13\end{vmatrix}=-10368$$

$$\therefore\qquad \frac{I_3}{I_2}=-72$$

特征方程 $\lambda^2-26\lambda+144=0$ 的两根为

$$\lambda_1=18,\lambda_2=8$$

故曲线的规范方程为

$$18x^2+8y^2-72=0$$

标准方程为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

曲线为一椭圆

2. 无心二次曲线

这时$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$,即 $I_2=0,I_3\neq 0$,它的方程可化简成

$$a_{22}'y'^2+2a_{13}'x'=0$$

因此有

$$I_1'=a_{22}'=I_1$$

$$I_3'=\begin{vmatrix}0 & 0 & a_{13}'\\ 0 & a_{22}' & 0\\ a_{13}' & 0 & 0\end{vmatrix}=-a_{22}'a_{13}'^2=-I_1a_{13}'^2$$

而 $$I_3'=I_3$$

$$\therefore\qquad a_{13}'=\pm\sqrt{\frac{-I_3}{I_1}}$$

于是得到：

定理 4.6.4 如果二次曲线为无心曲线，那么它的方程可化简成

$$I_1 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}\,x = 0 \qquad (4.6-10)$$

其中“±”任取一个即可．称方程(4.6－10)为无心二次曲线的归范方程.

由定理 4.6.4 可知，用不变量化简无心二次曲线方程的方法是：只要计算出 I_1 与 I_3 的值，便可直接写出其规范方程(4.6－10).

例 2 求二次曲线

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y - 50 = 0$$

的规范方程与标准方程.

解

$$\because\ I_1 = 9 + 16 = 25, I_2 = 9 \times 16 - 12^2 = 0,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 9 & -12 & -20 \\ -12 & 16 & -15 \\ -20 & -15 & -50 \end{vmatrix} = -15625 \neq 0,$$

$$\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} = 50$$

所以，曲线是无心二次曲线，它的规范方程为

$$25y^2 + 50x = 0 \text{ 或 } 25y^2 - 50x = 0$$

它的标准方程为

$$y^2 = -2x \text{ 或 } y^2 = 2x$$

曲线为一抛物线.

3. 线心曲线

这时$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$,即 $I_2=I_3=0$

它的方程可化简成

$$a_{22}'y'^2+a_{33}'=0$$

因此有

$$I'_1=a'_{22}=I_1$$

$$K'_1=\begin{vmatrix}0 & 0\\0 & a_{33}'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a'_{22} & 0\\0 & a'_{33}\end{vmatrix}=a_{22}'a_{33}'=I_1a_{33}'$$

由于在 $I_2=I_3=0$ 时,K_1 在移轴变换与转轴变换下都不变,从而 $K_1'=K_1$

$\therefore a_{33}'=\frac{K_1}{I_1}$　　于是得到:

定理 4.6.5　如果二次曲线为线心曲线,那么它的方程可化简成

$$I_1y^2+\frac{K_1}{I_1}=0 \qquad (4.6-11)$$

方程(4.6—11)称为线心二次曲线的规范方程.

由定理 4.6.5 可知,利用不变量化简线心二次曲线方程,只要计算出 I_1 与 K_1 的值,便可直接写出其规范方程(4.6—11).

例 3　不作坐标变换,证明方程

$$25x^2-10xy+y^2+10x-2y-25=0$$

表示两条平行直线,并求它们之间的距离.

解　因为 $a_{11}=25,a_{12}=-5,a_{22}=1,a_{13}=5,a_{23}=-1$,

$$\frac{25}{-5}=\frac{-5}{1}=\frac{5}{-1}$$

所以曲线是线心二次曲线.

由于　$I_1=25+1=26$

$$K_1 = \begin{vmatrix} -25 & 5 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -25 \end{vmatrix} = -676$$

所以曲线的规范方程为

$$26y^2 - \frac{676}{26} = 0$$

即 $$y = \pm 1$$

故原方程表示两条平行直线，它们之间的距离为 2.

从上面的三个定理知道，二次曲线的形状可由三个不变量 I_1、I_2、I_3 和半不变量 K_1 完全确定．因此，二次曲线的几何量与几何性质均可由这四个量所确定，这四个量构成二次曲线不变量的完全系统．在这个意义下，不变量是更深刻地反应了方程和曲线的关系．所以，寻找并研究不变量就成为几何学中的一个重要问题.

根据上面的三个定理，可利用不变量 I_1、I_2、I_3 与半不变量 K_1 对二次曲线作如下分类(见下表)：

<table>
<tr><th>曲线类型</th><th colspan="3">判 别 式</th><th>曲线名称</th></tr>
<tr><td rowspan="3">椭圆型</td><td rowspan="3">$I_2>0$</td><td colspan="2">$I_1I_3<0$</td><td>椭圆</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I_1I_3>0$</td><td>虚椭圆</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I_3=0$</td><td>点(变态椭圆)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">双曲线</td><td rowspan="2">$I_2<0$</td><td colspan="2">$I_3\neq0$</td><td>双曲线</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I_3=0$</td><td>两相交直线(变态双曲线)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">抛物型</td><td rowspan="4">$I_2=0$</td><td colspan="2">$I_3\neq0$</td><td>抛物线</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$I_3=0$</td><td>$K_1<0$</td><td>两平行直线</td></tr>
<tr><td>$K_1>0$</td><td>两虚平行直线</td></tr>
<tr><td>$K_1=0$</td><td>两重合直线</td></tr>
</table>

请读者给出上述结论的证明.

由于椭圆型二次曲线的规范方程为

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_1} = 0 \qquad (4.6-12)$$

其中 λ_1、λ_2 是特征方程的根. 此时 $I_2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$, $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, 可见 λ_1、λ_2、I_1 同号. 显然当 $I_1 I_3 < 0$ 时,(4.6-12)表示椭圆;当 $I_1 I_3 > 0$ 时,(4.6-12)表示虚椭圆;当 $I_3 = 0$ 时,(4.6-12)表示一点.

由于双曲型二次曲线的规范方程也为(4.6-12),但这时 $I_2 = \lambda_1\lambda_2 < 0$,即 λ_1 与 λ_2 异号. 当 $I_3 \neq 0$ 时,(4.6-12)表示双曲线;当 $I_3 = 0$ 时,(4.6-12)表示两相交直线.

对于抛物型二次曲线,即 $I_2 = 0$,如 $I_3 \neq 0$,二次曲线为无心曲线,其特征方程为(4.6-10),它表示抛物线;如果 $I_3 = 0$,二次曲线为线心曲线,其特征方程为(4.6-11),当 $K_1 < 0$ 时,(4.6-11)表示两平行直线,当 $K_1 > 0$ 时,(4.6-11)表示两平行虚直线,当 $K_1 = 0$ 时,(4.6-11)表示两重合直线.

例 4 试确定 p、q 的值,使方程

$$2x^2 + 2pxy + 2y^2 - 7x + 2qy + 3 = 0$$

表示两平行直线.

解 当 $I_2 = I_3 = 0$,且 $K_1 < 0$ 时,方程表示两平行直线.

$$I_2 = \begin{vmatrix} 2 & p \\ p & 2 \end{vmatrix} = 4 - p^2 = 0$$

$$\therefore p = \pm 2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 2 & p & -7/2 \\ p & 2 & q \\ -7/2 & q & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3p^2 - 2q^2 - 7pq - 12\frac{1}{2}$$

$$=0 \quad (4.6-13)$$

将 $p=2$ 代入(4.6－13)得

$$q^2+7q+\frac{49}{4}=0$$

$$\therefore \quad q=-7/2$$

将 $p=-2$ 代入(4.6－13)得

$$q^2-7q+\frac{49}{4}=0$$

$$\therefore \quad q=7/2$$

另外，
$$K_1=\begin{vmatrix} 2 & q \\ q & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & -7/2 \\ -7/2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=-q^2-\frac{1}{4}<0$$

故当 $p=2,q=-7/2$ 或 $p=-2,q=7/2$ 时，原方程表示两平行直线.

例 5 就 λ 的值讨论方程

$$\lambda x^2-2xy+\lambda y^2-2x+2y+5=0$$

所表示的曲线.

解 $I_1=2\lambda, I_2=\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-1$

$$I_3=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=5\lambda^2-2\lambda-3$$

$$=(5\lambda+3)(\lambda-1)$$

(1)当 $I_2>0$ 时，如果 $\lambda>1$，那么 $I_1I_3>0$，方程表示虚椭圆；如果 $\lambda<-1$，那么 $I_1I_3<0$，方程表示椭圆.

(2)当 $I_2<0$,即当 $-1<\lambda<1$,且 $\lambda\neq-\frac{3}{5}$ 时,$I_3\neq0$,方程表示双曲线;当 $\lambda=-\frac{3}{5}$ 时,$I_3=0$,方程表示两相交直线.

(3)当 $I_2=0$ 时,如果 $\lambda=-1$,则 $I_3\neq0$,方程表示抛物线;如果 $\lambda=1$,则 $I_3=0$,这时

$$K_1=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=10\lambda-2=8>0$$

方程表示两平行虚直线.

例 6 如果方程

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{12}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

表示双曲线,则双曲线的两条渐近线方程为

$$F(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}-\frac{I_3}{I_2}=0 \qquad (4.6-14)$$

证明 对原坐标系 oxy 经过一个适当的坐标变换后,得新坐标 $o'x'y'$,使双曲线在新坐标系下的方程为

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\frac{I_3}{I_2}=0$$

它的两条渐近线在新坐标系下的方程为

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\frac{I_3}{I_2}-\frac{I_3}{I_2}=0 \qquad (4.6-15)$$

再将坐标系 $o'x'y'$ 变回到坐标系 oxy,在此坐标变换下,方程(4.6—15)左端前三项还原为 $F(x,y)$,而 $-\frac{I_3}{I_2}$ 是不变量,故双曲线两条渐近线在原坐标系 oxy 下的方程为(4.6—14).

习 题 4.6

1. 用不变量与半不变量判定下列曲线是何种曲线,并求出它的规

范方程与标准方程：

(1) $x^2+2xy-y^2+8x+4y-8=0$；

(2) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$；

(3) $x^2-4xy+3y^2+2x-2y=0$；

(4) $x^2+6xy+9y^2+2x-6y=0$；

(5) $3x^2+2xy+3y^2+8x+8y-10=0$；

(6) $x^2+2xy+y^2-2x-2y+1=0$；

(7) $9x^2-12xy+4y^2-18x+12y+34=0$；

(8) $4x^2+4xy+y^2+4x+2y-48=0$；

(9) $3x^2-2xy+3y^2-6x+2y+4=0$.

2. 试确定 λ 的值，使方程

$$\lambda x^2+\lambda xy-y^2-3x+6y-9=0$$

表示两条相交直线.

3. 就 λ 的值讨论方程

$$\lambda x^2+2\lambda xy+y^2-2x-2\lambda y+\lambda=0$$

表示何种曲线.

4. 就 λ 的值讨论方程

$$-3x^2+5xy+2y^2+\lambda x-3y-2=0$$

表示何种曲线.

5. 设二次曲线方程为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{12}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

证明：

(1)二次曲线为一条等轴双曲线或两条互相垂直的直线的充分必要条件为 $I_1=0$.

(2)二次曲线为圆的充分必要条件为 $I_1^2=4I_2$，$I_1I_3<0$.

6. 设方程

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

表示一椭圆，求此椭圆的面积(提示：椭圆的面积等于它的长半轴、短半轴及 π 的乘积).

第5章 矢量代数

解析几何的基本思想就是用代数的方法研究几何问题. 最常用的方法是坐标法,它是解析几何的重要工具. 但是要把空间几何结构有系统的代数化,还可以利用另外一种工具——矢量,使某些问题避免复杂的运算. 本章主要内容是介绍矢量的线性运算和两种乘法,以及它们的运算规律,并且通过矢量建立坐标系.

§5.1 矢 量

一、基本内容

(1)既有大小,又有方向的量叫做矢量,或称向量. 常用$\vec{a}$、$\vec{b}$等表示,或$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$表示. 在$\overrightarrow{AB}$中,A 叫做始点,B 叫做终点. 在几何上,用有向线段来表示矢量,用有向线段的方向表示矢量的方向;用有向线段的长度表示向量的大小. 矢量的长度叫做模,用$|\vec{a}|$、$|\overrightarrow{AB}|$等来表示. 模为零的矢量叫做零矢量,用$\vec{0}$表示之.

(2)模相等、方向相同的两矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$叫做相等矢量,记作$\vec{a}=\vec{b}$. 规定所有的零矢量都相等.

(3)如果一个矢量由大小和方向来确定,而与其始点的选取无关,则称此矢量叫做自由矢量. 以后若无特别声明,所讨论的都是自由矢量.

(4)模等于 1 的矢量称为单位矢量，又称幺矢. 与非零矢量 $\vec{a}$ 同向的单位矢量叫做 $\vec{a}$ 方向上的单位矢量，记作 $\vec{a}°$.

(5)大小相等、方向相反的两矢量叫做相反矢量. 矢量 $\vec{a}$ 的相反矢量记作 $-\vec{a}$.

(6)平行于同一条直线的一组矢量叫做共线矢量. 规定零矢量与任意矢量都共线.

(7)平行于同一平面的 $n(\geqslant 3)$ 个矢量叫做共面矢量. 在三个矢量中如果两个共线，则三矢量共面.

二、常用方法及其应用举例

给出一个量判断它是不是矢量将是最基本的，而给出一个矢量组判断这组矢量的位置关系及矢量的某些性质，对今后的学习将是很有好处的. 下面举例介绍常用方法.

例 1 判断下列各量哪些是矢量.

热量、重量、比热、动量、力、位移、重力加速度、体积、距离、速度、面积、磁场强度等.

答 重量、动量、力、位移、重力加速度、速度、磁场强度是矢量.

评注 判断一个量是数量还是矢量，就是要看当取定单位以后能不能用一个数量来表示，如果能则它是数量，否则它是矢量.

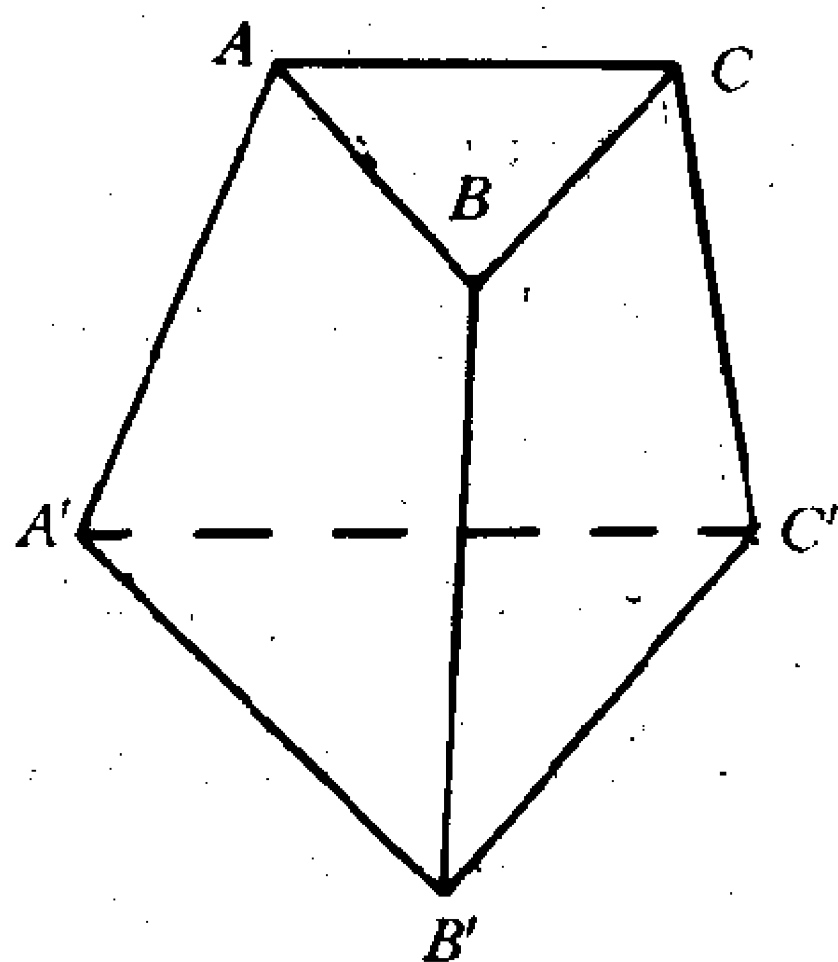


图 5—1

例 2 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 分别是三棱台 $ABC-A'B'C'$ 的上、下底面，见图 5—1. 试在矢量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{A'B'}$、$\overrightarrow{B'C'}$、$\overrightarrow{C'A'}$、$\overrightarrow{AA'}$、

$\overrightarrow{BB'}$、$\overrightarrow{CC'}$中找出共线矢量和共面矢量.

解 共线矢量有:$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{A'B'}$;$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{B'C'}$;$\overrightarrow{CA}$和$\overrightarrow{C'A'}$

共面矢量有

平行于 ABC 所在平面的矢量组是:

$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{A'B'}$、$\overrightarrow{B'C'}$、$\overrightarrow{C'A'}$

平行于 $ABB'A'$ 所在平面的矢量组是:

$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{A'B'}$、$\overrightarrow{AA'}$、$\overrightarrow{BB'}$

平行于 $BCC'B'$ 所在平面的矢量组是:

$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{B'C'}$、$\overrightarrow{BB'}$、$\overrightarrow{CC'}$

平行于 $CAA'C'$ 所在平面的矢量组是:

$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{C'A'}$、$\overrightarrow{CC'}$、$\overrightarrow{AA'}$

另外,由于$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{A'B'}$;$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{B'C'}$;$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{C'A'}$分别共线,所以$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{A'B'}$、$\overrightarrow{CC'}$;$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{B'C'}$、$\overrightarrow{AA'}$;$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{C'A'}$、$\overrightarrow{BB'}$分别是共面矢量.

评注 给出一组矢量,找出哪些是共面矢量时,必须注意以下两点:其一,把平行于同一平面的所有矢量写在同一组,不能少写,或分作两种;其二,只要有三个以上的矢量共面,都要写出,也不要少写.为此可分以下两步写出:

(1)以给出矢量所在图形的每一个平面为参照物,把平行于某一平面的所有矢量写在同一组,逐个平面进行考查.

(2)找出共线矢量,然后任意添加一个别的矢量,只要不与前面重复便可独立作为一组共面矢量,这样逐个进行验证即可.

例 3 设 $ABCD-A'B'C'D'$ 是平行六面体,见图 5-2.

试在矢量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{A'B'}$、$\overrightarrow{B'C'}$、$\overrightarrow{C'D'}$、$\overrightarrow{D'A'}$、$\overrightarrow{AA'}$、$\overrightarrow{BB'}$、$\overrightarrow{CC'}$、$\overrightarrow{DD'}$中找出相等矢量.

解 相等矢量有：$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{A'B'}$；$\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{B'C'}$，$\overrightarrow{CD}$ 和 $\overrightarrow{C'D'}$，$\overrightarrow{DA}$ 和 $\overrightarrow{D'A'}$；$\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{CC'}$和$\overrightarrow{DD'}$.

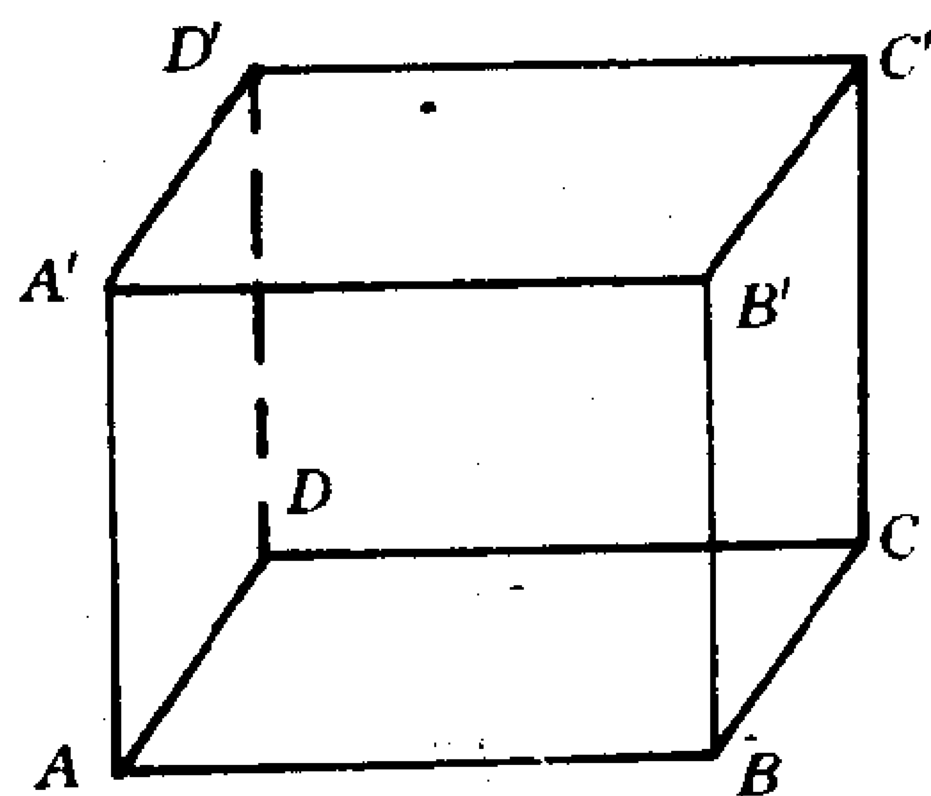


图 5—2

评注 考查矢量相等，(1)模相等；(2)共线且指向一致，缺一不可. 因此，找相等矢量应首先找共线矢量.

例 4 如果 $\vec{a}$与 $\vec{b}$共线，$\vec{b}$与 $\vec{c}$共线，问 $\vec{a}$与 $\vec{c}$是否共线.

解 (1)当 $\vec{b}\neq\vec{0}$时，$\vec{a}$与 $\vec{c}$共线.

(2)当 $\vec{b}=\vec{0}$时，$\vec{a}$与 $\vec{c}$不一定共线.

例 5 如果 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面，$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$共面，问 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{b}$是否共面.

解 (1)当 $\vec{b}$与 $\vec{c}$不共线时，$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$共面.

(2)当 $\vec{b}$与 $\vec{c}$共线时，$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$不一定共面. 如：取 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{d}$不共面，而 $\vec{c}=\vec{0}$，则 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$；$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$均共面，而 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$不共面.

评注

1° 零矢量与任意矢量共线，故在讨论矢量的共线、共面问题时，必须特别注意，而不能一味地按照直线的平行性来讨论.

2° 零矢量没有确定的方向，可以认为零矢量的方向是任意的.

3° 由于讨论的是自由矢量，因此矢量可以平行移动．因此在讨论共线矢量和共面矢量时，也不能完全按照它们所在的直线的平行性、共面关系来确定矢量的关系．

4° 共线矢量和共面矢量不具备传递性，而如果除去零矢量，则共线矢量具备传递性．

5° 由于讨论的是自由矢量，因此共线矢量和共面矢量的定义可以转化为：

(1)共线矢量：把一组矢量平行移动到空间同一点，如果这组矢量在同一条直线上．

(2)共面矢量：把一组矢量平行移动到空间同一点，如果这组矢量在同一平面上．

6° 矢量只有相等的概念，矢量的模是数量可以比较大小，而矢量本身不能比较，即$\vec{a}>\vec{b}$、$\vec{a}<\vec{b}$是没有意义的．

习 题 5.1

1. 如图 5－2，$ABCD-A'B'C'D'$是平行六面体，试在矢量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{A'B'}$、$\overrightarrow{C'B'}$、$\overrightarrow{D'A'}$、$\overrightarrow{AA'}$、$\overrightarrow{B'B}$中找出相反矢量、共面矢量．

2. 如果表示$\vec{a}$、$\vec{b}$的有向线段垂直，就说这两个向量垂直，用$\vec{a}\perp\vec{b}$来表示．问：

(1)设$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{b}\perp\vec{c}$，$\vec{a}/\!/\vec{c}$吗？

(2)若$\vec{a}\perp\vec{d}$，$\vec{b}\perp\vec{d}$，$\vec{c}\perp\vec{d}$，$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面吗？

3. 下列哪些量是矢量：

(1)动能，(2)电场强度，(3)离心力，(4)温度，(5)功，(6)引力，(7)电荷，(8)剪应力，(9)频率，(10)风速．

4. 如果$ABCDEF$是一正六边形，O是它的中心，则在下列向量组中

(1)$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{OF}$；

(2)$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DE}$、$\overrightarrow{EF}$；

(3) $\overrightarrow{FE}$、$\overrightarrow{ED}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{FA}$

哪些是相等矢量？哪些是相反矢量？

§5.2 矢量的线性运算

一、基本内容

(1) 设$\vec{a}$、$\vec{b}$是两个矢量，以空间任一点 O 为始点，作矢量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，以 A 为始点，作矢量$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{OB}$叫做$\vec{a}$与$\vec{b}$的和矢量，记作

$$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}.$$

(2) 设$\vec{a}$、$\vec{b}$是两个已知矢量，以空间任一点 O 为始点分别作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，以$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形 $OACB$，则$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$.

(3)矢量的加法满足如下算律：

(i)对任意矢量$\vec{a}$：$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

(ii)任意矢量$\vec{a}$：$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

(iii)结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(iv)交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(v)消去律：若$\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$，则$\vec{b}=\vec{c}$

(4)若矢量$\vec{b}$与矢量$\vec{c}$之和等于矢量$\vec{a}$，即$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$，称$\vec{c}$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的差，记作：$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

(5)$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

(6)实数 λ 与矢量$\vec{a}$的乘积是一个矢量，记作$\lambda\vec{a}$，它的模$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$，$\lambda\vec{a}$的方向，当 $\lambda>0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向；当 $\lambda<0$

时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向.

一个正数λ乘以一个矢量等于把此矢量拉长了λ倍；一个负数λ乘以一个矢量等于它把矢量的相反矢量拉长了$-\lambda$倍.

(7)数量乘以矢量满足下列性质：

(i)$\lambda\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow\lambda=0$或$\vec{a}=\vec{0}$

(ii)$\vec{a}\neq\vec{0}$，则$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^{\circ}$，或$\vec{a}^{\circ}=\vec{a}/|\vec{a}|$

(iii)$1\cdot\vec{a}=\vec{a}$，$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

(iv)数因子结合律：$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})$

(v)第一分配律：$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

(vi)第二分配律：$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

(vii)$\vec{b}\,/\!/\,\vec{a}(\neq\vec{0})\Leftrightarrow$存在唯一的实数$\lambda$使得$\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

二、常用方法及应用举例

例1　设互不共线的三矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，如果$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则顺次将它们的终点和始点相连结构成一个三角形.

分析　要证明在$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$条件下顺次将它们的终点和始点相连结构成一个三角形，可作$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{c}$，如果由$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$能证明$A$与$D$重合即可，为此只须证明$\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

证明　作$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{c}$，则

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

所以A、D重合，即它们可以构成三角形.

评注　一般地讲，若n个矢量$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$、…、$\vec{a}_n$之和$\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i=\vec{0}$，则顺次将它们的始点和终点连结起来正好构成一个封

闭折线.

例2 证明:四面体每一个顶点与对面重心所连的线段共点,且这点到顶点的距离是它到对面重心的距离的三倍.

分析 要证明四面体的顶点与对面重心连线共点,且此点到顶点的距离是它到对面重心的距离的三倍,只须在这4条直线 AG_1、BG_2、CG_3、DG_4 上分别取满足条件的4点 H_1、H_2、H_3、H_4,然后证明 H_1、H_2、H_3、H_4 重合即可.

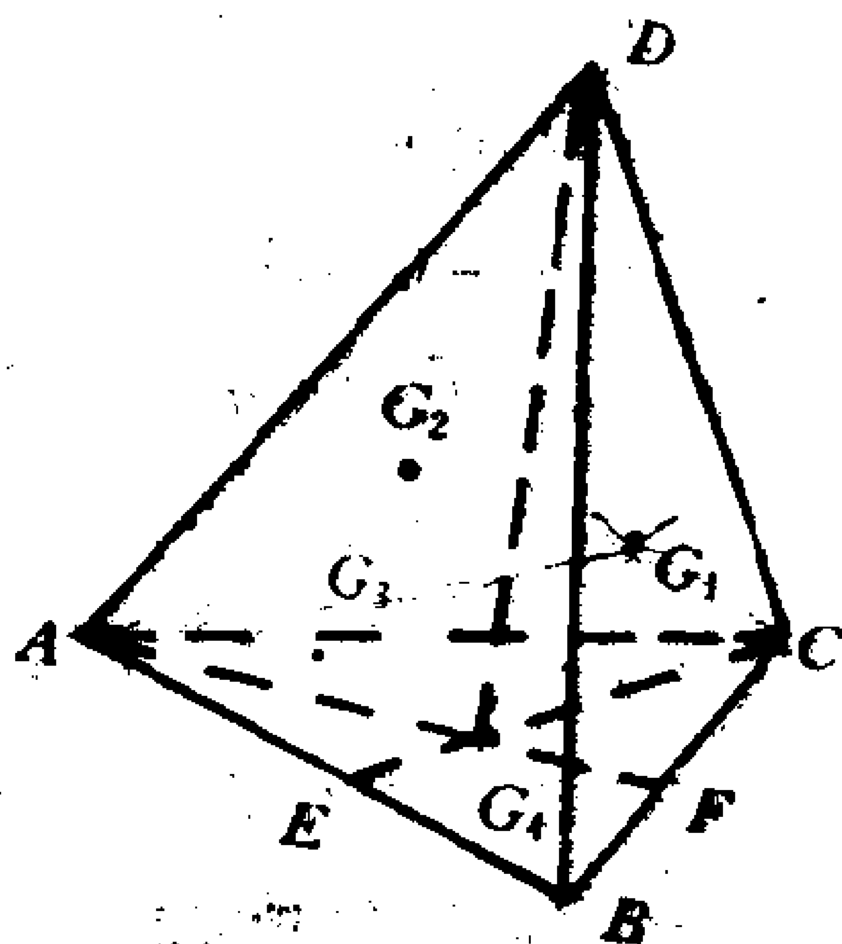


图 5—3

证明

方法一 取 H_1、H_2、H_3、H_4,且满足

$$\overrightarrow{AH_1}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG_1};\overrightarrow{BH_2}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BG_2};$$

$$\overrightarrow{CH_3}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CG_3};\overrightarrow{DH_4}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DG_4}$$

则 $$\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{H_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH_2}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BG_2}$$

$$=-\frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\right]+\overrightarrow{AB}$$

$$+\frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right]=\vec{0}$$

所以,H_1 与 H_2 重合.

同理可证,H_1 与 H_3、H_1 与 H_4 重合,故 H_1、H_2、H_3、H_4 是同一点.

方法二 仍取 H_1、H_2、H_3、H_4 满足 $AH_1=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG_1}$;$BH_2=\frac{3}{4}\overrightarrow{BG_2}$;$CH_3=\frac{3}{4}\overrightarrow{CG_3}$;$\overrightarrow{DH_4}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DG_4}$.

则 $\overrightarrow{AH_2}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH_2}$

$$=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})\right]$$

$$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$$

$$=\overrightarrow{AH_1}$$

所以，H_1与H_2重合.

同理，H_1与H_3、H_4重合，故四线共点.

评注

1° 要证明 n 条直线相交于一点的问题可分为以下两步来完成：

(1) 在每条直线上各选出一个适当点(根据题中的要求，或题中有关结论取点)；

(2) 验证这 n 个点重合.

2° 证明两点重合的问题，可以转化为证明由这两点构成的矢量是一个零矢量；或转化为以空间某点为始点，而以这两点为终点的两矢量是相等矢量的问题.

3° 证明 n 个点重合，只须证明其中一个点与其余各点都重合即可.

例3 证明平行四边形的对角线相互平分.

分析 设 $ABCD$ 是一个平行四边形，取 O 是 AC 之中点，见图5-4. 要证明对角线相互平分，首先要证明 O 在直

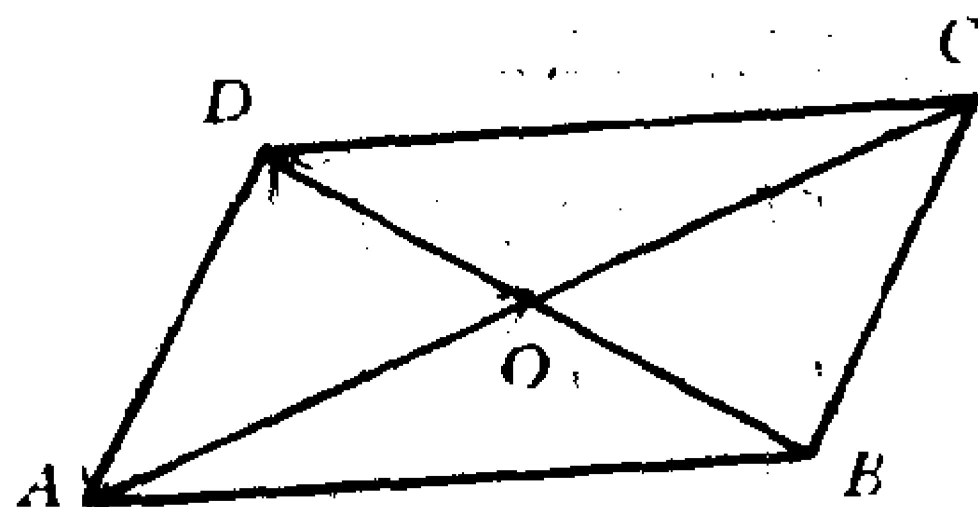


图 5-4

线 BD 上，即证明 O、B、D 共线，其次证明 O 是 BD 之中点，为此只须证明：

$$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$$

证明 设 O 是 AC 之中点，则 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，所以，$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}$ 故 O、B、D 共线且 O 是 BD 之中点.

评注 在证明两条直线相交时，可按以下两步来完成：

(1) 在其中一条直线上取适当的一点；

(2) 验证此点在另外一条直线上，这样可以把直线共点的问题转化为三点共线的问题，而证明三点共线的问题又可转化为两矢量共线的问题.

例4 证明梯形的中位线平行上下底边，且等于上下底边和的一半.

分析 见图5—5，由于梯形的上、下底是平行的，所以要证明中位线平行于上下底，只须证明 EF 与 DC 平行，而要证明 EF 与 DC 平行，只须证明 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线，而 $\overrightarrow{EF}/\!/\overrightarrow{CD}$ 的充要条件是 $\overrightarrow{EF}=\lambda\,\overrightarrow{CD}$，所以只须求出 λ 即可.

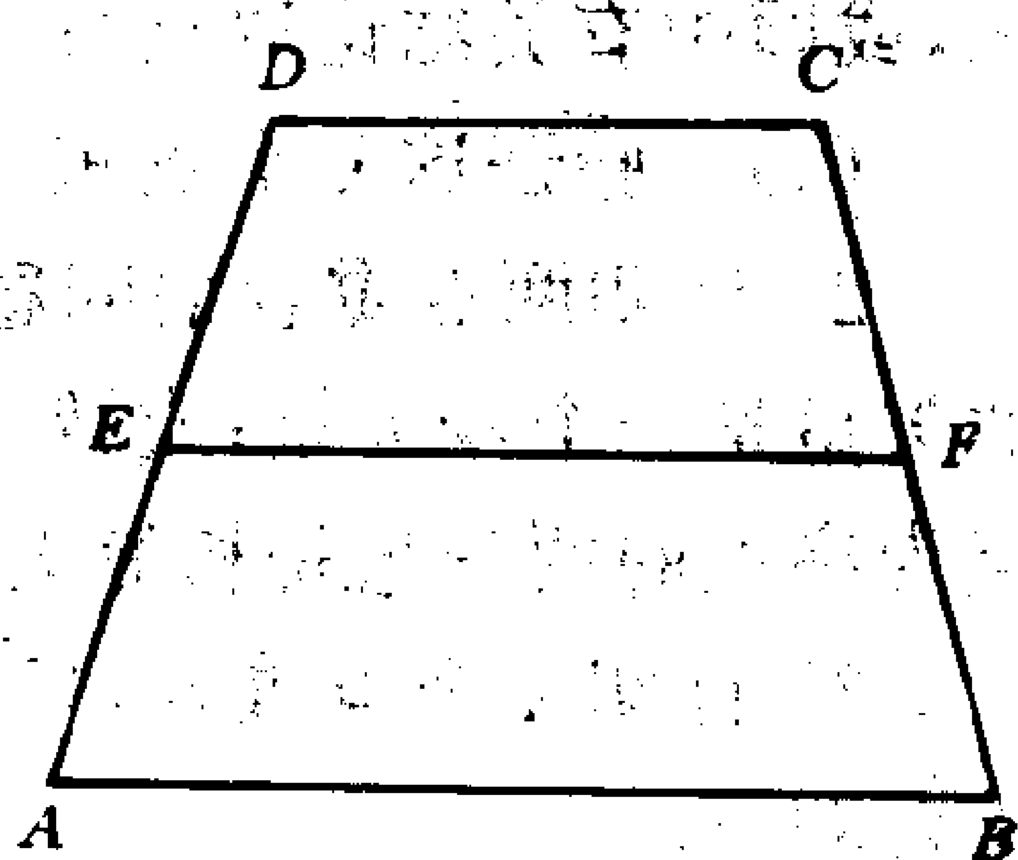


图 5—5

证明 因为 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线，所以存在实数 x 使得 $\overrightarrow{AB}=x\,\overrightarrow{DC}\,(x>0)$

而
$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$$
$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$$

$\therefore \quad \overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}[(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CF})]$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$$

$$=\frac{1}{2}(x\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC})$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)\overrightarrow{DC}$$

故 $\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{DC}\Rightarrow EF$ 与 DC、AB 平行.

又$\because \quad \overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(x+1)\overrightarrow{DC}$

$\therefore \quad |\overrightarrow{EF}|=\frac{1}{2}(x+1)|\overrightarrow{DC}|$

$$=\frac{1}{2}(x|\overrightarrow{DC}|+|\overrightarrow{DC}|)$$

$$=\frac{1}{2}(|x\overrightarrow{DC}|+|\overrightarrow{DC}|)$$

$$=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|)$$

故梯形的中位线平行于上下底且等于上下底和的一半.

评注

1° 在证明两直线平行时,可分两步来完成:

(1) 在每条直线各取一个非零矢量;

(2) 验证这两个矢量共线.验证两矢量共线可以利用一个矢量 $\vec{b}$ 与一个非零矢量 $\vec{a}$ 共线的充要条件是存在实数 λ 使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

2° 要证明有关线段长度的等式时,应首先将数量问题转化为矢量模之间的关系式,然后根据矢量的特点及运算来加以证明.

3° 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向,则 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

例5 对于任意两个矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，证明下列不等式成立，即

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

证明 若 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 中有零矢量，则等号成立；当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向时，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向时，$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$；当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线时，$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{a}+\vec{b}$ 构成一个三角形，因为三角形的任一边不等于另外两边之和，所以不等式总成立.

评注 矢量模同数的绝对值有相似的性质：

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

只是在考查有关矢量的模之间的关系时，可以利用矢量和、差、数乘矢量模的几何意义，将其转化为三角形或平行四边形与边之间的关系来处理.

例6 设点 O 是平面上正多边形 A_1、A_2、…、A_n 的中心，见图5-6，证明 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=0$

证明 由题设有 $|\overrightarrow{OA_i}|=|\overrightarrow{OA_{i+1}}|$，且 A_1、A_2、…、A_n 这个多边形被分成 n 个全等的三角形.

在平面上任取一点 B_1，连续作 $\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{OA_1}$；$\overrightarrow{B_2B_3}=\overrightarrow{OA_2}$；…；$\overrightarrow{B_iB_{i+1}}=\overrightarrow{OA_i}$，…；$\overrightarrow{B_{n-1}B_n}=\overrightarrow{OA_{n-1}}$，则每两个首尾相接的矢量 $\overrightarrow{B_{i-1}B_i}$ 与 $\overrightarrow{B_iB_{i+1}}$ 间的夹角都是 $\frac{2\pi}{n}$，连接 $\overrightarrow{B_nB_1}$，由正多边形的

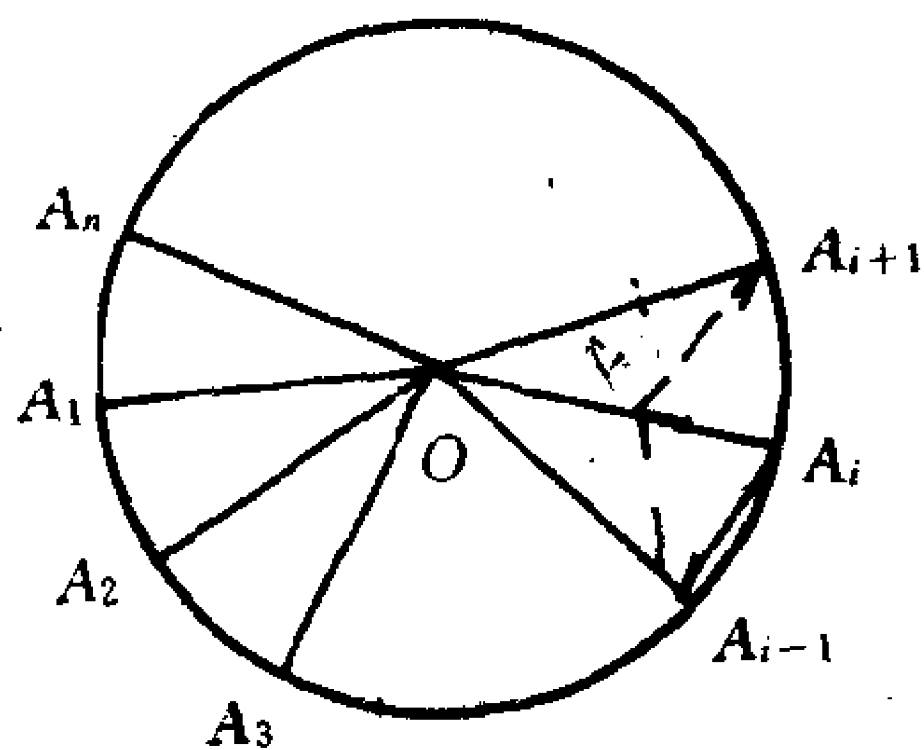


图 5-6

性质及作法可知，B_1，B_2，…，B_n 为一正多边形，因而有 $\overrightarrow{B_nB_1}$

$=\overrightarrow{OA_n}$

所以，$\overrightarrow{OA_1}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2B_3}+\cdots+\overrightarrow{B_nB_1}=\vec{0}$

评注

1° 可以利用作图法证明矢量相等.

2° 证明 n 个矢量的和为零矢量，只须证明如果将这 n 个矢量的后面一个矢量的始点放在前面一个矢量的终点上，这 n 个矢量正好构成一个封闭图形即可.

3° 此题还可以用下面两种方法来证明.

方法二

分析 根据题中条件知矢量$\overrightarrow{OA_i}$一定在$\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$的分角线上，因此$\overrightarrow{OA_i}$与$\overrightarrow{A_iA_{i-1}}+\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$共线. 所以，$\overrightarrow{OA_i}=\lambda_i(\overrightarrow{A_iA_{i-1}}+\overrightarrow{A_iA_{i+1}})$，如果能证明 λ_i 与 i 无关，则

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\lambda_i\sum(\overrightarrow{A_iA_{i-1}}+\overrightarrow{A_iA_{i+1}})=\vec{0}$$

所以，关键是要说明 λ_i 与 i 无关.

证明 过 A_{i-1}和 A_{i+1}分别作 A_iA_{i+1}和 A_iA_{i-1}的平行线与 OA_i 相交于 A'_i，则$\overrightarrow{A_iA_{i-1}}+\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=\overrightarrow{A_iA'_i}=\lambda_i\overrightarrow{OA_i}$.

即 $\lambda_i=-\dfrac{|\overrightarrow{A_iA'_i}|}{|\overrightarrow{OA_i}|}$是个常数，由分析知结论成立.

方法三

证明 以 O 为原心，以$\overrightarrow{OA_1}$所在直线为 x 轴建立右手直角坐标系$\{0;\vec{i},\vec{j}\}$，则由正多边形的性质（不妨设正 n 边形外接圆的直径为1）知 A_K 的坐标为

$$A_K\left(\cos\frac{2(K-1)}{n}\pi,\sin\frac{2(K-1)}{n}\pi\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{OA_K} = \cos\frac{2(K-1)}{n}\pi\vec{i} + \sin\frac{2(K-1)}{n}\pi\vec{j}$$

$$\sum_{K=1}^{n}\overrightarrow{OA_K} = \left(\sum_{K=1}^{n}\cos\frac{2(K-1)}{n}\pi\right)\vec{i} + \left(\sum_{K=1}^{n}\sin\frac{2(K-1)}{n}\pi\right)\vec{j}$$

而 $$\sum_{K=1}^{n}\cos\frac{2(K-1)}{n}\pi = \sum_{K=1}^{n}\sin\frac{2(K-1)}{n}\pi = 0$$

$$\therefore \sum_{K=1}^{n}\overrightarrow{OA_K} = \vec{0}$$

评注 在利用分量来证明矢量相等时，可分三步来完成证明：

(1)建立适当的坐标系；

(2)求出所用矢量的分量；

(3)验证所要证明的矢量等式两端的两矢量具有相同的分量.

习 题 5.2

1. 已知三角形 ABC 的三边 BC、CA、AB 上的中点依次为 D、E、F，试证顺次将三矢量 $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$ 的终点和始点相连结正好构成一个三角形.

2. 设 M 是平行四边形 $ABCD$ 对角线交点，证明对任意一点 O，有 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.

3. 设 $ABCD$ 是一个四面体的顶点，M、N 分别是边 AB、CD 的中点，证明：$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

4. 证明点 M 在直线 AB 上的充要条件是：存在实数 λ、μ，使得 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，并且 $\lambda+\mu=1$，其中 O 是空间任一点.

5. 证明三角形三中线相交于一点，并且这点到顶点的距离是到对边中点距离的二倍.

6. 设 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$是已知矢量，证明：

(1) $|\vec{b}-\vec{a}|\geqslant|\vec{a}|-|\vec{b}|$

(2) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|$

7. 如果将四边形相邻两中点用直线连接，证明所得的四边形是平行四边形.

8. 设 $ABCD$ 是平行四边形，P、Q 分别是边 BC、CD 的中点，证明 AP、AQ 与对角线 BD 相交于 E、F，而将 BD 三等份.

9. 在$\triangle ABC$ 中，边 BC 被 D 分为 $m:n$，试用 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 来表示矢量 $\overrightarrow{AD}$.

§5.3 矢量的线性关系及分解

一、基本内容

(1) 设 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、…、$\vec{a}_n$ 为 n 个矢量，而 λ_1、λ_2、…、λ_n 是 n 个实数，$\vec{a}=\lambda_1\vec{a}_1+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n$ 称为 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、…、$\vec{a}_n$ 的线性组合.

(2) 对于 n 个矢量 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、…、$\vec{a}_n$，如果存在一组不全为零的实数 λ_1、λ_2、…、λ_n，使得

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0}$$

那么称 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、…、$\vec{a}_n$ 线性相关，否则称为线性无关.

(3) 如果 $\vec{e}\neq\vec{0}$，那么矢量 $\vec{r}$与 $\vec{e}$共线的充要条件是存在唯一的实数 λ 使得 $\vec{r}=\lambda\vec{e}$.

(4) 如果 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$不共线，那么矢量 $\vec{r}$与 $\vec{e}_1$共面的充要条件是存在唯一的一组实数 x、y，使得 $\vec{r}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$.

(5) 如果 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$共面，那么任意矢量 $\vec{r}$可以用 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$线性表示，即 $\vec{r}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$且 x、y、z 由 $\vec{r}$、$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$

唯一确定.

(6) $n(\geqslant 2)$个矢量线性相关的充要条件是其中一个矢量是其余矢量的线性组合.

(7) 如果一组矢量中部分相关,则这组矢量线性相关.

(8) 一个矢量线性相关的充要条件是零矢量;两个矢量线性相关的充要条件是两个矢量共线;三个矢量线性相关的充要条件是三矢量共面;空间任四个或四个以上的矢量都线性相关.

二、常用方法及应用举例

例1 已知不共线矢量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$,见图5－7,求它们分角线上的一个单位矢量.

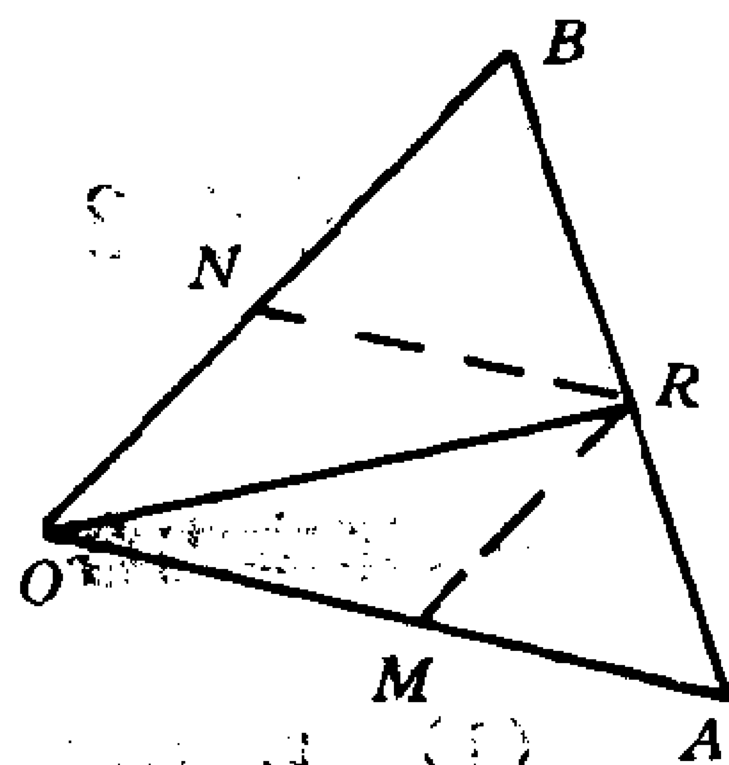


图 5－7

分析 设 OR 是$\angle AOB$ 的平分线.要求OR 的一个单位矢量,只要求出分角线上的一个非零矢量即可. 为此设 R 是分角线与 AB 的交点,只须求出矢量 OR.

解 过 R 分别作平行于 OA、OB 的直线分别交 OB、OA 于N、M,根据矢量加法的平行四边形法则知$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$,而

$$|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{ON}|=\lambda\neq 0$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OM}=\lambda\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},\overrightarrow{ON}=\lambda\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\overrightarrow{OR}=\lambda\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OR}^{\circ} = \frac{\overrightarrow{OR}}{|\overrightarrow{OR}|} = \frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{||\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}|}$$

例2 已知三角形 OAB，其中 $OA=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，而 M、N 分别是三角形两边 OA、OB 上的点，且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\vec{a}(0<\lambda<1)$，$\overrightarrow{ON}=\mu\vec{b}(0<\mu<1)$，設 AN 与 BM 相交于 P，试把矢量 $\overrightarrow{OP}=\vec{P}$ 分解成 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的线性组合.

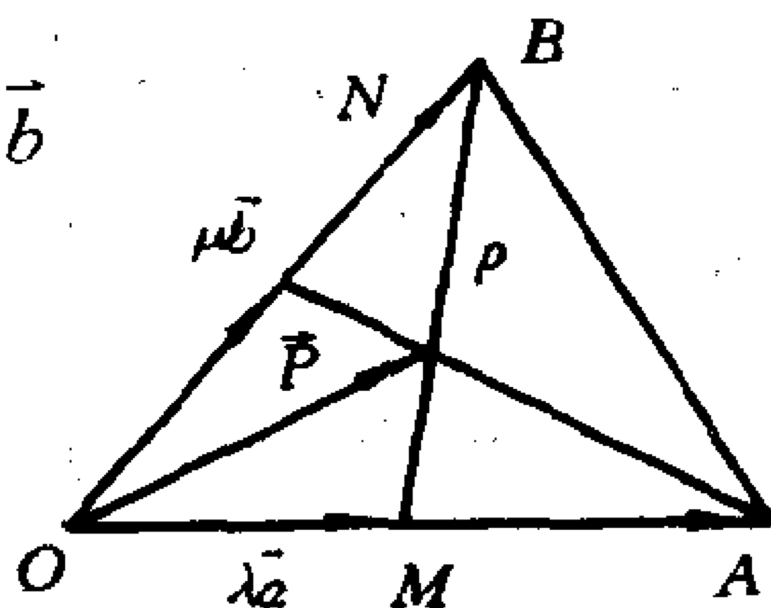


图 5-8

解 由图5-8可知，

$$\vec{P} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$$

或
$$\vec{P} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP}$$

而
$$\overrightarrow{OM} = \lambda\vec{a}, \overrightarrow{ON} = \mu\vec{b},$$

$$\overrightarrow{MP} = m\,\overrightarrow{MB} = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) = m(\vec{b} - \lambda\vec{a}),$$

$$\overrightarrow{NP} = n\,\overrightarrow{NA} = n(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON}) = n(\vec{a} - \mu\vec{b}),$$

所以
$$\vec{P} = \lambda\vec{a} + m(\vec{b} - \lambda\vec{a}) = \lambda(1-m)\vec{a} + m\vec{b} \qquad (1)$$

或
$$\vec{P} = \mu\vec{b} + n(\vec{a} - \mu\vec{b}) = n\vec{a} + \mu(1-n)\vec{b} \qquad (2)$$

因为 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不共线，所以由(1)、(2)知

$$\begin{cases} \lambda(1-m) = n \\ m = \mu(1-n) \end{cases}$$

由上方程组解得

$$m = \frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}, n = \frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu}$$

$$\therefore \quad \vec{P} = \frac{\lambda(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}\vec{a} + \frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}\vec{b}$$

例3 设△ABC 上的三边矢量 $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，

设三角形三条内角平分线相交于 P，见图5－9，试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 来表示矢量 $\overrightarrow{AP}$（其中，$|\vec{a}|=a, |\vec{b}|=b, |\vec{c}|=c$）.

解 由例1知，$|\vec{b}|\vec{c}-|\vec{c}|\vec{a}$ 与 $\overrightarrow{AP}$ 共线，$-|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}$ 与 $\overrightarrow{BP}$ 共线.

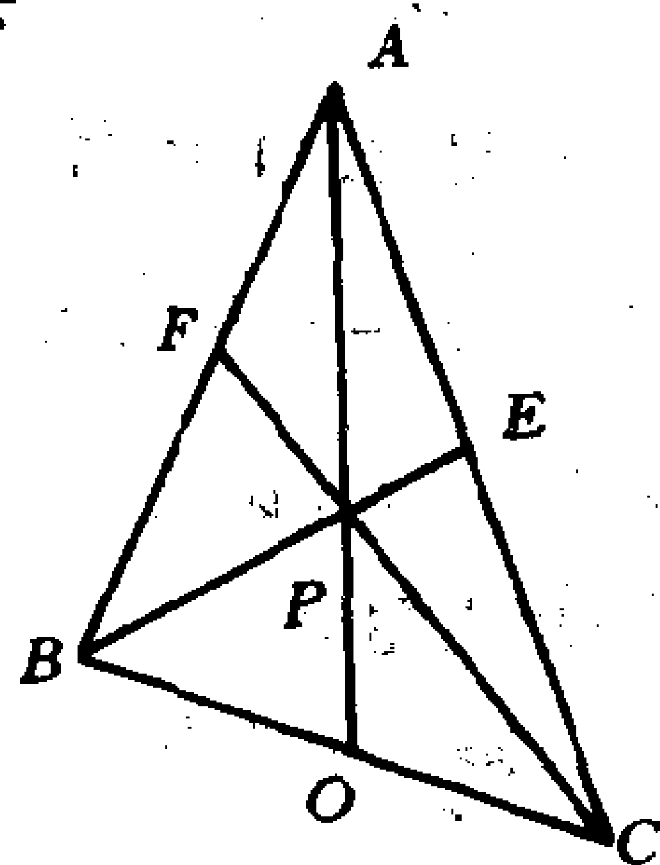


图5-9.

$\therefore \overrightarrow{AP}=\lambda(|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB})$

$=\lambda(-c\vec{b}+b\vec{c})$

或 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}$

$=\overrightarrow{AC}+\mu(|\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{CB}+|\overrightarrow{CB}|\overrightarrow{CA})$

$=-(1-\mu|\overrightarrow{CA}|-\mu|\overrightarrow{CB}|)\overrightarrow{AC}$

$+\mu|\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{AB}=-(1-\mu b-\mu a)\vec{b}+\mu b\vec{c}$

由矢量分解的唯一性知

$$\begin{cases} -(1-\mu b-\mu a)=-c\lambda \\ \mu b=\lambda b \end{cases}$$

解之得
$$\lambda=\mu=\frac{1}{a+b+c}$$

故
$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{a+b+c}(b\vec{c}-c\vec{b})$$

评注 从上三例可以看出：

1° 在求矢量时，往往利用矢量的三角形法则或平行四边形法则将其分解成与已知矢量共线的若干个矢量的和，然后再导出这些矢量与已知矢量的线性组合即可.

2° 在求矢量时，也常常利用待定系数法. 如果已知两矢量不共线，而求与它们共面的一个矢量，具体方法是：

(1)引入两个参数；

(2)把所求矢量通过三角形法则，写成参数和已知两矢量

的两种组合形式；

(3)利用矢量分解的唯一性知，这两种表达式的两个不共线矢量的系数相等，可得到一个关于参数的方程组；

(4)解方程组求出参数；

(5)把求出参数之值反代回去，即可得到所求矢量.

3° 如果已知三个不共面矢量，而要用这三个矢量表示一个矢量，具体方法同上，只是将(2)改为

(2)′把所求矢量通过三角形法则，写成由参数和已知三矢量的两种组合形式.

例4 证明三角形的三条中线相交于一点.

证明 见图5－10，设$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，且$\vec{a}$、$\vec{b}$不共线，即$OAB$构成三角形；又设其三边$AB$、$BO$、$OA$上的中点分别为$C$、$E$、$D$. 下面证明$OC$、$AE$、$BD$相交于一点.

为此取OC上一点G_1，设$\overrightarrow{OG_1}=\lambda\overrightarrow{OC}=\frac{\lambda}{2}(\vec{a}+\vec{b})$. 在$BD$上取一点$G_2$，设

$$\overrightarrow{BG_2}=\mu\overrightarrow{BD}=\frac{\mu}{2}(\vec{a}-2\vec{b})$$

求使G_1、G_2重合的λ、μ之值，于是

$$\vec{0}=\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{G_1O}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG_2}$$

$$=-\frac{\lambda}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}+\frac{\mu}{2}(\vec{a}-2\vec{b})$$

$$=\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)\vec{a}+\left(1-\frac{\lambda}{2}-\mu\right)\vec{b}$$

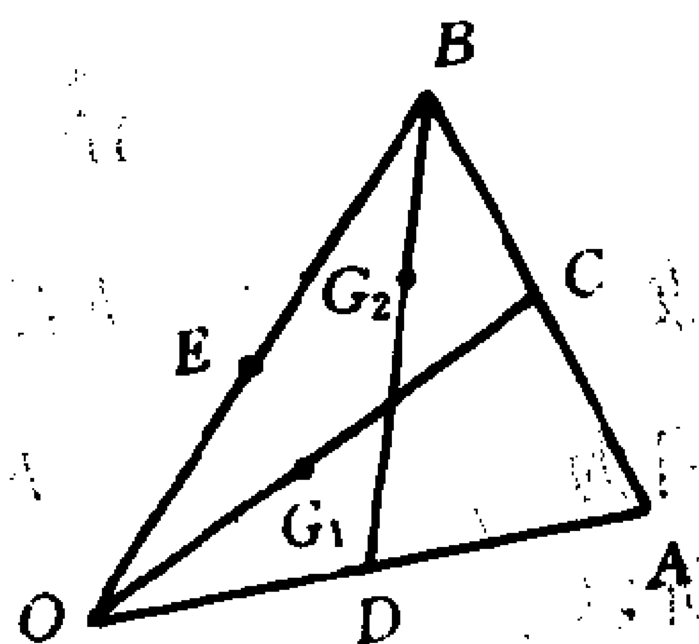


图 5－10

因为$\vec{a}$、$\vec{b}$不共线

$$\therefore \quad \begin{cases} \dfrac{\mu}{2} - \dfrac{\lambda}{2} = 0 \\ 1 - \dfrac{\lambda}{2} - \mu = 0 \end{cases}$$

解方程得 $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$. 这就说明 OC 上满足 $\overrightarrow{OG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$ 的点 G_1 和 BD 上满足 $\overrightarrow{BG_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$ 的点 G_2 重合.

同理,可以证明 AE 上满足 $\overrightarrow{AG_3} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ 的点 G_3 与 G_1、G_2 也重合,故三角形三中线相交于一点.

例5 如图5－11所示,设 D 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的中点,E、F 分别是边 AC、AB 上的点,若 EF 平行 BC,则 AD、FC、BE 相交于一点.

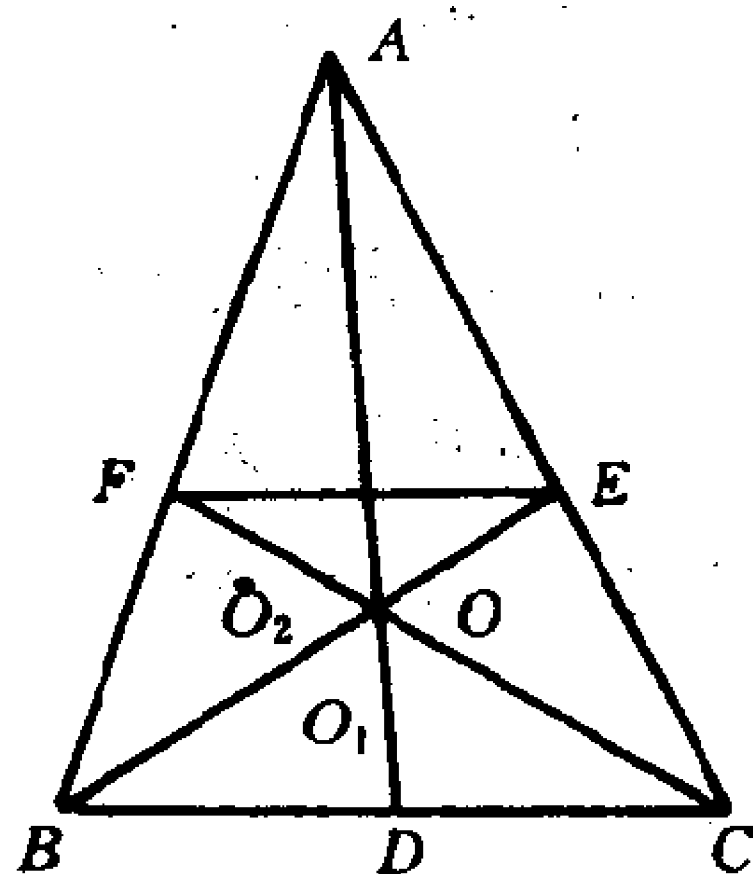


图 5－11

证明 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$,因为 F、E 分别在 AB、AC 上,所以存在常数 s、t,使得

$$\overrightarrow{AF} = s\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AE} = t\vec{b}$$

故 $$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} = t\vec{b} - s\vec{c}$$

因为 $$\overrightarrow{FE} \text{ 平行于 } \overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{c}$$

所以 $$s = t$$

下面证明 CF 与 BE 相交于一点,为此设取 BE 上一点 O_1,则设 $\overrightarrow{BO_1} = \lambda\overrightarrow{FE}$;取 FC 上一点 O_2,则设 $\overrightarrow{FO_2} = \mu\overrightarrow{FC}$. 求使 O_1、O_2 重合的 λ、μ 之值,则

$$\vec{0} = \overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FO_2}$$

$$= -\lambda\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF} + \mu\overrightarrow{FC}$$

$$= (-\lambda s + \mu)\vec{b} + (\lambda - 1 + s - s\mu)\vec{c}$$

由矢量分解唯一性得

$$\begin{cases} -\lambda s + \mu = 0 \\ \lambda - 1 + s - s\mu = 0 \end{cases}$$

解之得 $\lambda = \dfrac{1}{1+s}, \mu = \dfrac{s}{1+s}$

这说明 BE 上有一点 O_1 与 FC 上一点 O_2 重合. 故 BE 与 CF 相交于一点,设为 O.

下证 O 也在 AD 上.

因为 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FO} = \dfrac{s}{1+s}(\vec{b} + \vec{c})$

$$= \frac{2s}{1+s} \cdot \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$$

$$= \frac{2s}{1+s}\overrightarrow{AD}$$

所以,A、O、D 共线.

故 AD、CF、BE 相交于一点.

评注 从上两例可知:

1° 证明两线 l_1、l_2 共点可用下法:

(1)求出 l_1、l_2 上的一个非零矢量 $\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$;

(2)设 A_1、A_2 是 l_1、l_2 上一定点,G_1、G_2 分别是 l_1、l_2 上一点,可由参数 λ_1、λ_2 通过下式给出

$$\overrightarrow{A_1G_1} = \lambda_1\vec{V}_1, \overrightarrow{A_2G_2} = \lambda_2\vec{V}_2$$

(3)由 $\overrightarrow{G_1G_2} = \vec{0}$ 并通过矢量分解的唯一性确定 λ_1、λ_2. 若 λ_1、λ_2 存在,则两直线相交于一点;若 λ_1、λ_2 不存在,则两直线不相交.

2° 在用矢量证明 $n(\geqslant 3)$ 条直线 $l_1,l_2\cdots,l_n$ 相交于一点时，可用以下方法：

(1)求出 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 上各一个非零矢量 $\vec{V}_1,\vec{V}_2,\cdots,\vec{V}_n$；

(2)设 A_i 是 l_i 上一定点，G_i 是 l_i 上一点，则

$$\overrightarrow{A_iG_i} = \lambda_i\vec{V}_i$$

(3)由 $\overrightarrow{G_1G_i}=\vec{0}$，确定 λ_1,λ_i；

(4)若对任意 $i=2,3,\cdots,n$，都存在 λ_i 使与同一个 λ_1 满足 $\overrightarrow{G_1G_i}=\vec{0}$，则根据矢量分解的唯一性知 G_1 与 G_i 重合，即 n 条直线相交于一点.

3° 在证明三条直线相交于一点时，也可以用下述方法：

(1)求出 l_1、l_2、l_3 上的三个非零矢量 $\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$、$\vec{V}_3$，A_1、A_2、A_3 是 l_1、l_2、l_3 上定点；

(2)利用评注1° 求出 l_1 与 l_2 的交点 G，并求出矢量 $\overrightarrow{A_3G}$；

(3)证明 $\overrightarrow{A_3G}$ 与 $\vec{V}_3$ 共线.

例6 已知 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 不共面，证明 $\vec{a}=-\vec{e}_1+3\vec{e}_2+2\vec{e}_3$；$\vec{b}=4\vec{e}_1-6\vec{e}_2+2\vec{e}_3$；$\vec{c}=-3\vec{e}_1+12\vec{e}_2+11\vec{e}_3$ 共面.

证明 要证明 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面，即证存在不全为零的 λ、μ、ν，使

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}$$

即

$$\lambda(-\vec{e}_1+3\vec{e}_2+2\vec{e}_3)+\mu(4\vec{e}_1-6\vec{e}_2+2\vec{e}_3)+\nu(-3\vec{e}_1+12\vec{e}_2+11\vec{e}_3)=\vec{0}$$

亦即

$$(-\lambda+4\mu-3\nu)\vec{e}_1+(3\lambda-6\mu+12\nu)\vec{e}_2+(2\lambda+2\mu+11\nu)\vec{e}_3=0$$

因为 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 线性无关，

$$\therefore \quad \begin{cases} -\lambda+4\mu-3\nu=0 \\ 3\lambda-6\mu+12\nu=0 \\ 2\lambda+2\mu+11\nu=0 \end{cases}$$

由于系数行列式等于0，由克莱姆法则知齐次线性方程组有非零解，故三矢量共面.

例7 已知矢量$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$不共面，判断$\vec{a}=3\vec{e}_2+2\vec{e}_2+(-\vec{e}_3)$，$\vec{b}=\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3$和$\vec{e}=-\vec{e}_1+4\vec{e}_2+5\vec{e}_3$是否共面.

解 要判断$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$是否共面，只须判断是否存在不全为零的λ、μ、ν，使得

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}$$

若存在，则$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面，否则不共面.

为此，考查 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}$，即

$$\lambda(3\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3)+\mu(\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3) \\ +\nu(-\vec{e}_1+4\vec{e}_2+5\vec{e}_3)=\vec{0}$$

亦即

$$(3\lambda+\mu-\nu)\vec{e}_1+(2\lambda+\mu+4\nu)\vec{e}_2+(-\lambda-\mu+5\nu)\vec{e}_3 \\ =\vec{0}$$

因为$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$不共线，所以$\begin{cases} 3\lambda+\mu-\nu=0 \\ 2\lambda+\mu+4\nu=0 \\ -\lambda-\mu+5\nu=0 \end{cases}$

由于齐次线性方程组的系数行列式不等于零，故方程组只有零解，所以三矢量不共面.

评注 设$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$不共面，那么

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$$
$$\vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3$$
$$\vec{c}=c_1\vec{e}_1+c_2\vec{e}_2+c_3\vec{e}_3$$

共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

例8 设$\overrightarrow{OP_i}=\vec{r}_i(i=1,2,3,4)$，试证 P_1、P_2、P_3、P_4四点共面的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_i(i=1,2,3,4)$，使

$$\lambda_1\vec{r}_1+\lambda_2\vec{r}_2+\lambda_3\vec{r}_3+\lambda_4\vec{r}_4=\vec{0}，且\sum_{i=1}^{4}\lambda_i=0$$

证明 因为 P_1、P_2、P_3、P_4四点共面的充分必要条件是三矢量$\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_3}$、$\overrightarrow{P_1P_4}$共面，而三矢量共面的充要条件是三矢量线性相关.

为此考查

$$m_1\overrightarrow{P_1P_2}+m_2\overrightarrow{P_1P_3}+m_3\overrightarrow{P_1P_4}=\vec{0}$$

即 $m_1(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+m_2(\vec{r}_3-\vec{r}_1)+m_3(\vec{r}_4-\vec{r}_1)=\vec{0}$

亦即$-(m_1+m_2+m_3)\vec{r}_1+m_1\vec{r}_2+m_2\vec{r}_3+m_3\vec{r}_4=\vec{0}$

取 $\lambda_1=-(m_1+m_2+m_3),\lambda_2=m_1,\lambda_3=m_2,\lambda_4=m_3$

则有 $\lambda_1\vec{r}_1+\lambda_2\vec{r}_2+\lambda_3\vec{r}_3+\lambda_4\vec{r}_4=\vec{0}$

且 $\sum_{i=1}^{4}\lambda_i=(-m_1-m_2-m_3)+m_1+m_2+m_3=0$

根据 λ_i 的取法知 m_1、m_2、m_3不全为零的充要条件是 λ_1、λ_2、λ_3、λ_4不全为零.

故 P_1、P_2、P_3、P_4共面的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\vec{r}_i=\vec{0} \quad 且\sum_{i=1}^{4}\lambda_i=0$$

评注 证明四点共面的问题往往转化成三矢量共面的问题，而证明三矢量共面的问题，又转化为三矢量线性相关的问

题来处理.

例9 设 O 是 AB 连线外任一点，证明 ABC 共线的充要条件是$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，且 $\lambda+\mu=1$.

证明 设$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$

则 ABC 共线的充要条件是$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{AB}$共线，即$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{AB}$线性相关，亦即存在不全为零的 k_1、k_2使得 $k_1\overrightarrow{AC}+k_2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

即 $k_1(\vec{c}-\vec{a})+k_2(\vec{b}-\vec{a})=\vec{0}$

亦即 $-(k_1+k_2)\vec{a}+k_2\vec{b}+k_1\vec{c}=\vec{0}$

所以 $\vec{c}=\dfrac{k_1+k_2}{k_1}\vec{a}-\dfrac{k_2}{k_1}\vec{b}$

这里 $k_1\neq 0$（这是因为，若 $k_1=0$，则 $k_2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. 而当 A 与 B 不同时，有 $k_2=0$，这与 A、B、C 共线相矛盾）.

记 $\lambda=\dfrac{k_1+k_2}{k_1}$，$\mu=-\dfrac{k_2}{k_1}$

则 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$

且 $\lambda+\mu=\dfrac{k_1+k_2}{k_1}-\dfrac{k_2}{k_1}=1$

故 A、B、C 共线的充要条件是 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，且

$$\lambda+\mu=1$$

例10 设 O 是$\triangle ABC$ 内一点，BO 交 AC 于 E，CO 交 AB 于 F，D 是 BC 的中点，见图5—12，证明：若 FE 平行于 BC，则 A、O、D 共线.

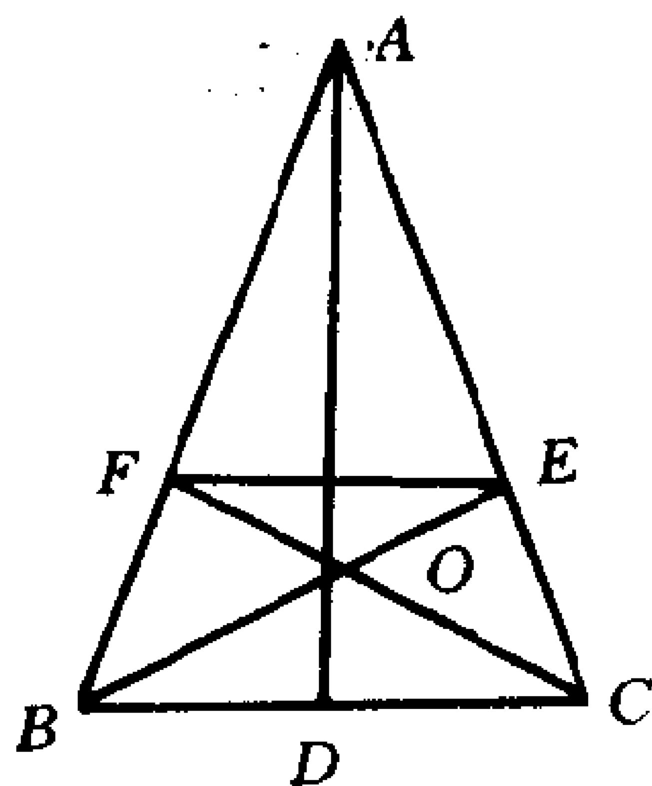


图 5-12

证明 由§5.3例5知

$$\overrightarrow{AO}=\frac{s}{1+s}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

而
$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

所以
$$\overrightarrow{AO}=\frac{2s}{1+s}\overrightarrow{AD}$$

故 A、O、D 共线.

例11 如图5－13所示，设 D、E、F 分别是$\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 上的三点，试证这三点在同一条直线上的充要条件是

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=-1$$

证明 设$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$

$\overrightarrow{BD}=\mu\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{CE}=\nu\overrightarrow{EA}$

则 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=-1$的充分必要条件是

$$\lambda\cdot\mu\cdot\nu=-1 \qquad (1)$$

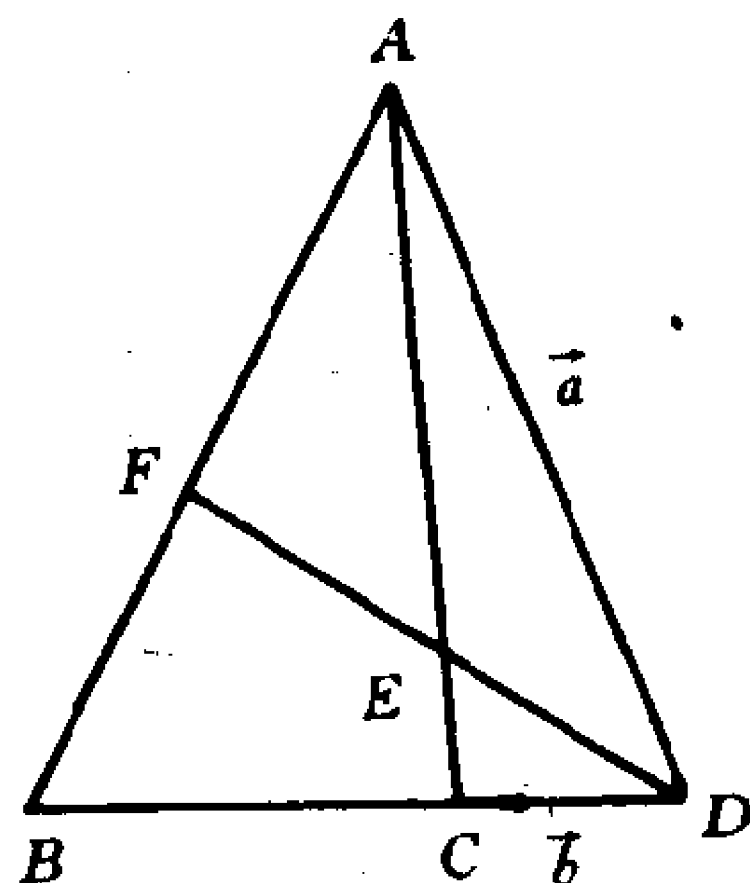


图 5－13

在图5－13中，设$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{b}$，于是，

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}$$
$$=\vec{b}+\frac{\nu}{1+\nu}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})$$
$$=\vec{b}+\frac{\nu}{1+\nu}(-\vec{b}+\vec{a})$$

$$= \frac{\nu}{1+\nu}\vec{a} + \frac{1}{1+\nu}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}$$

$$= \vec{a} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}$$

$$= \vec{a} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB})$$

$$= \vec{a} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(-\vec{a} - \mu\overrightarrow{DC})$$

$$= \vec{a} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(-\vec{a} - \mu\vec{b})$$

$$= \frac{1}{1+\lambda}\vec{a} - \frac{\lambda\mu}{1+\lambda}\vec{b}$$

故 D、E、F 共线的充要条件是$\overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{DF}$共线的充要条件，即

$$\frac{\frac{\nu}{1+\nu}}{\frac{1}{1+\lambda}} = -\frac{\frac{1}{1+\nu}}{\frac{\lambda\mu}{1+\lambda}}$$

即 $$\lambda\mu\nu = -1 \tag{2}$$

由(1)、(2)知：

D、E、F 共线的充要条件是$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -1$

评注 在证明有关三点共线时，一般将其转化为两矢量共线的问题来处理，即分以下步骤进行.

(1)首先用线性无关的矢量组来表示要证明的两共线矢量；

(2)验证在给定条件下这两个矢量写成线性无关的矢量组的组合系数对应成比例.

习 题 5.3

1. 已知 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$、$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ 不共线，G 是 ABC 所在平面上任一点，设 AG 与 BC、CG 与 AB 分别相交于 D、E，且 $\overrightarrow{AG}=m\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{CG}=n\overrightarrow{CE}$，试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$、m、n 表示 $\overrightarrow{AG}$.

2. 证明四面体三组对棱中点连线共点.

3. 证明四面体顶点与对面重心连线共点.

4. 证明三角形三内角平分线相交于一点.

5. 设 O 是 $\triangle ABC$ 内一点，BO 交 AC 于 E，CO 交 AB 于 F，AO 交 BC 于 D，若 D 是 BC 之中点，则 FE 平行于 BC.

6. 已知矢量 $\vec{a}=2\vec{e}_1-3\vec{e}_2+3\vec{e}_3$，$\vec{b}=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2+2\vec{e}_3$，其中 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 不共面，求证 $\vec{c}=2\vec{e}_1-2\vec{e}_2+4\vec{e}_3$ 与 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 共面.

7. 设 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ 不共线，$\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$，$\vec{b}=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2$，问 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是否共线.

8. 设 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 不共面，证明三矢量 $\vec{a}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$、$\vec{b}=\vec{e}_2+\vec{e}_3$、$\vec{c}=\vec{e}_1+\vec{e}_3$ 不共面.

9. 设 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ 不共线，确定 $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$，$\vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2$ 共线的条件.

§5.4 标架与坐标

一、基本内容

(1)空间一定点 o 连同不共面的三矢量 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 的全体，称为空间的标架. 记作 $\{o;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. 如果 $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=|\vec{e}_3|=1$，则称标架为笛卡尔标架；如果还要求两两相互垂直，称标架称为笛卡尔直角标架；如果 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 的顺序符合右手法则，称为右手标架；否则称为左手标架. 右手直角标架用 $\{0;\vec{i},\vec{j}$，

$\vec{k}$}来表示；

(2)在标架$\{o,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$下，空间任一矢量$\vec{r}$均可唯一地表示为$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$的线性组合. 即存在$x$、$y$、$z$，使得$\vec{r}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$，称$\{x,y,z\}$为$\vec{r}$在标架$\{o;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$下的分量；空间中一点$P$的径矢$\overrightarrow{oP}$的分量称为点$P$在标架下的坐标，用$(x,y,z)$表示；

(3)空间中的点(矢量)与其坐标(x,y,z)是一一对应的，那么这种一一对应关系称为空间的坐标系. 由于坐标系是由标架唯一确定的故用标架的记号来表示坐标系，什么样的标架决定什么样的坐标系. 见图5－14，由右手直角标架$\{o;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$所决定的坐标系称为右手直角坐标系，仍用$\{o;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$来表示；

(4)矢量的分量等于其终点坐标减去始点坐标；

(5)两矢量和(差)的分量等于对应分量的和(差)；

(6)一个数乘以一个矢量等于这个数乘以矢量的每一个分量；

(7)两矢量共线的充要条件是对应分量成比例；

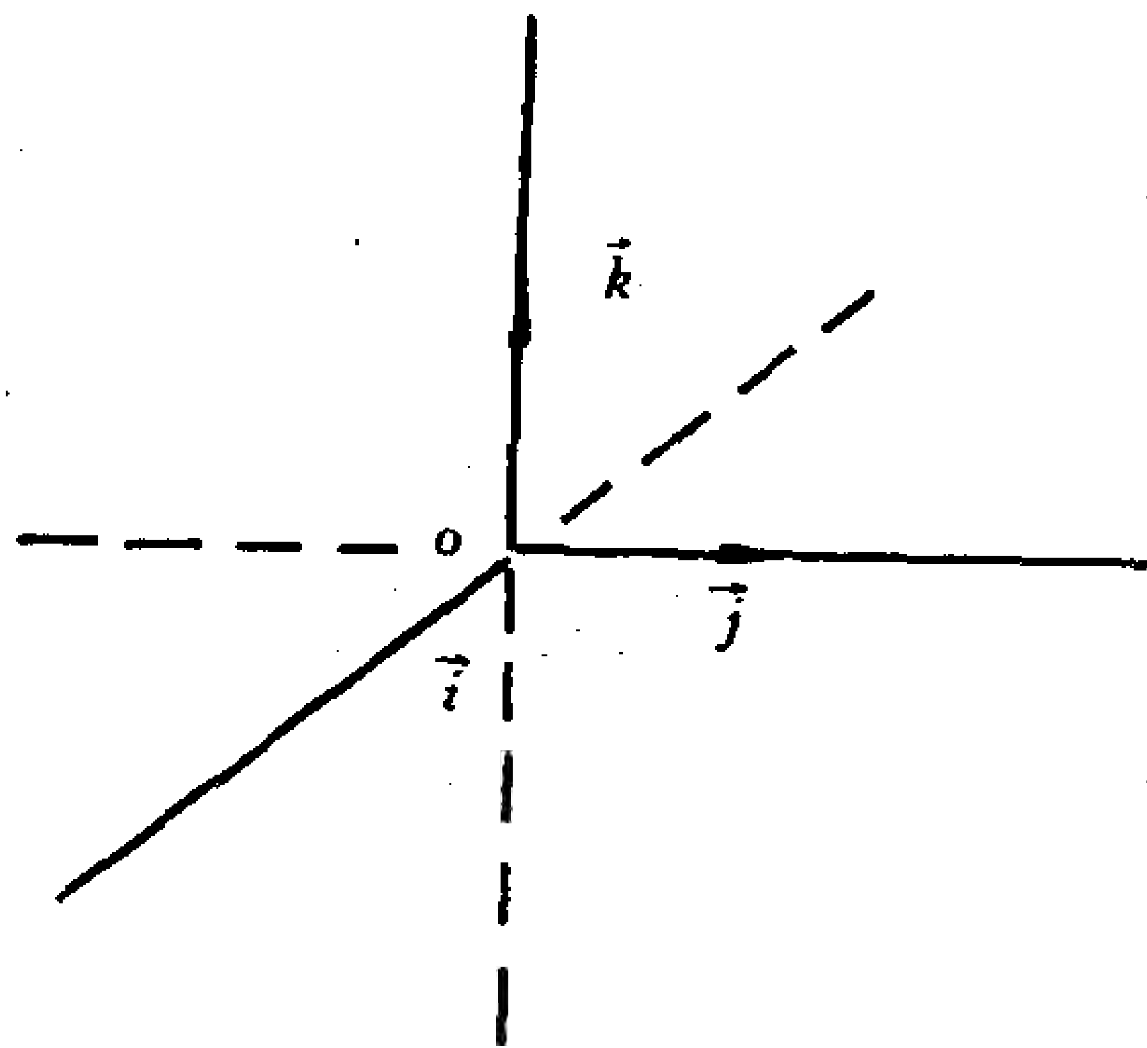


图 5－14

(8)三矢量共面的充要条件是三矢量的分量组成的行列式等于零；

(9)设$P_1\neq P_2$，$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，称$P$为分$\overline{P_1P_2}$为定比$\lambda$的分点，其分点坐标为$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

二、常用方法及应用举例

例1 设 P 点在标架 $\{o;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 下的坐标为(1,2,3)，试画出 P 点位置.

解 **方法一**(见图5－15)

作 $\overrightarrow{OA}=\vec{e}_1$，$\overrightarrow{AB}=2\vec{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=3\vec{e}_3$，则 $C\equiv P$.

方法二(见图5－16)

(1)作 $\overrightarrow{OA}=\vec{e}_1$

$\overrightarrow{OB}=2\vec{e}_2$

$\overrightarrow{OC}=3\vec{e}_3$

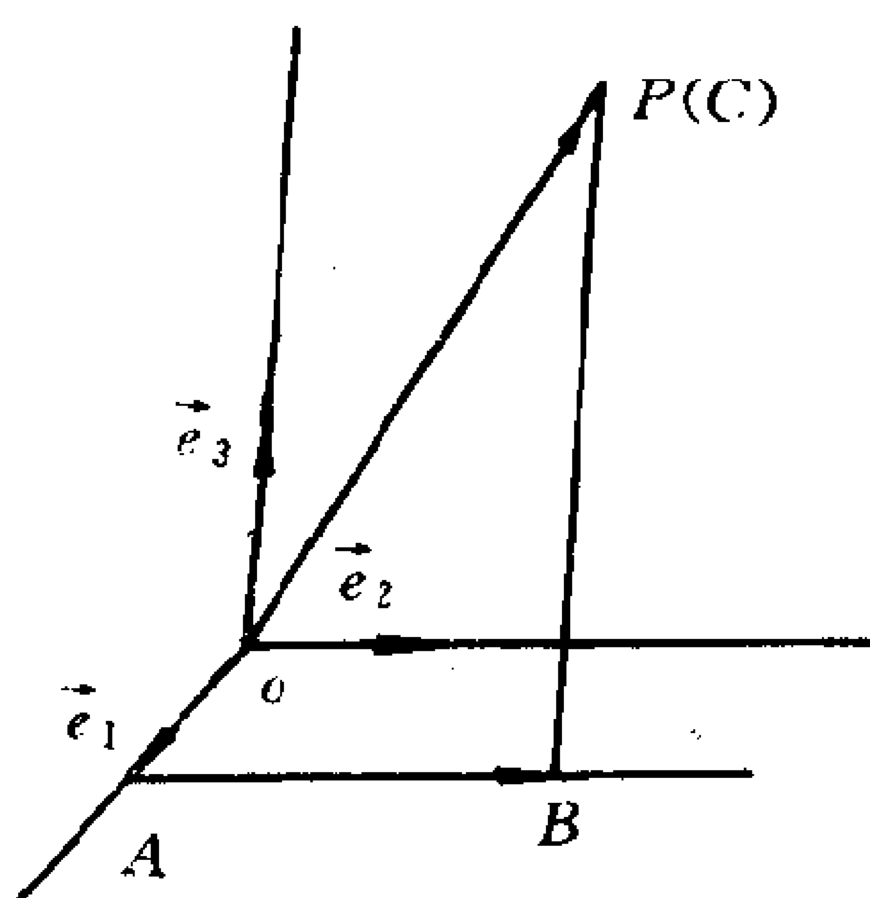


图5－15

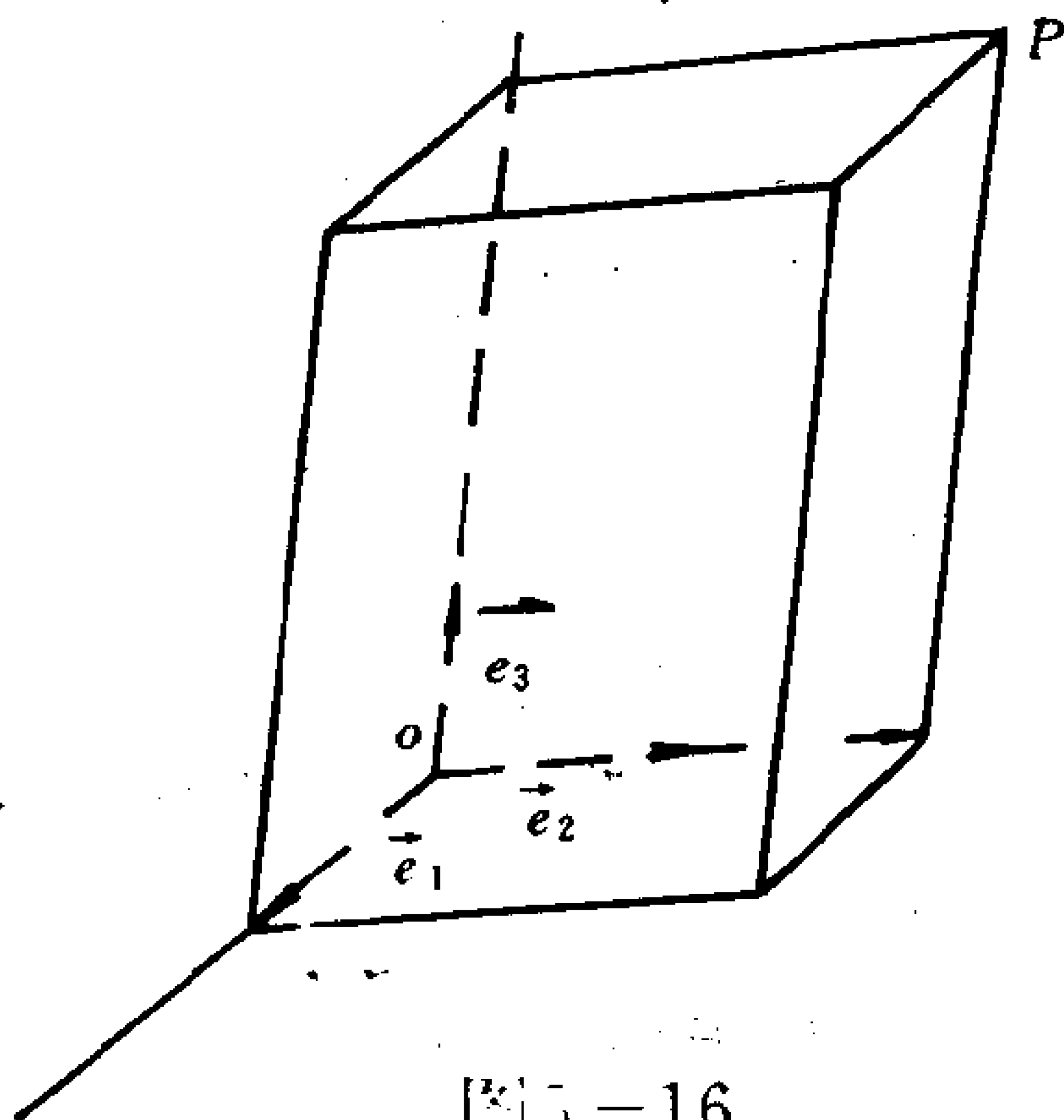


图5－16

(2)过 A、B、C 分别作平行于 $\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$；$\vec{e}_3$、$\vec{e}_1$；$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ 的平面，则三平面相交于一点，即为所找的 P 点.

评注

1° 方法一称为折线法. 画 $P(x,y,z)$ 的位置；(1)作 $\overrightarrow{OA}=x\vec{e}_1$；(2) $\overrightarrow{AB}=y\vec{e}_2$；(3) $\overrightarrow{BC}=z\vec{e}_3$. 则 C 即为 P.

2° 方法二称为平行六面体法. 画点 $P(x,y,z)$ 的位置:

(1) 作 $\overrightarrow{OA}=x\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB}=y\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC}=z\vec{e}_3$;

(2) 过 A、B、C 分别作垂直于 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 的平面,则三平面的交点即为 P 点.

例2 给出一点 P,求 P 在 $\{o;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 下的坐标.

解 (1) 过 P 作平面 π_x 垂直于 $\vec{e}_1$,交 x 轴于 P_x;过 P 作平面 π_y、π_z 分别垂直于 $\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$,交 y、z 轴于 P_y、P_z.

(2) P 点的坐标为 $\left(\pm\dfrac{|\overrightarrow{OP_x}|}{|\vec{e}_1|},\pm\dfrac{|\overrightarrow{OP_y}|}{|\vec{e}_2|},\pm\dfrac{|\overrightarrow{OP_z}|}{|\vec{e}_3|}\right)$.

其中正负号的选取与 P 点所在卦限的符号相同. 若 P 在第一卦限,则均取正号.

例3 已知矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是 $\triangle ABC$ 两边 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 上的矢量,见图5－17,设 R 是角 A 的分角线与 BC 的交点,求矢量 $\overrightarrow{AR}$.

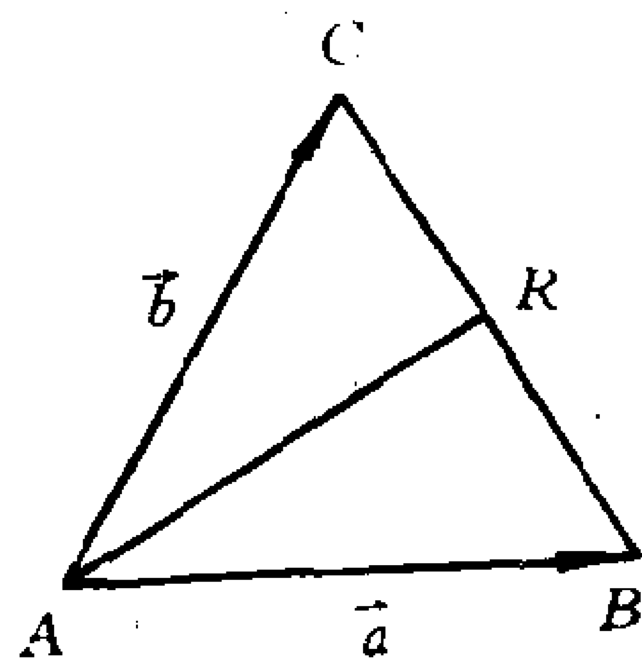


图 5－17

解 取 $\{A;\vec{a},\vec{b}\}$ 为标架,则 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$. 另外,由分角线的性质有

$$\frac{|BR|}{|RC|}=\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$$

∴ $$|\overrightarrow{BR}|=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}|RC|$$

故 $$\overrightarrow{BR}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\overrightarrow{RC}$$

由定比分点公式知 $R\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}},\dfrac{\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}}{1+\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}}\right)$.

即 $$R\left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|},\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\right)$$

$$\overrightarrow{AR}=\left\{\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|},\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\right\}$$

$$=\frac{|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$$

例4 已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$是三角形 ABC 边 AB、AC 上的矢量，D、E 是 BC、CA 上的一点，且$\overrightarrow{BD}=m\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CE}=n\overrightarrow{EA}$. 试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$、m、n 表示矢量$\overrightarrow{AG}$，其中 G 是 AD 与 BE 的交点.

解 取$\{A;\vec{a},\vec{b}\}$为标架，要求$\overrightarrow{AG}$，只须求出 G 点的坐标即可.

由题意知，$B(1,0)$、$C(0,1)$、$A(0,0)$，因为$\overrightarrow{BD}=m\overrightarrow{DC}$，所以，由定比分点公式得 $D\left(\dfrac{1}{1+m},\dfrac{m}{1+m}\right)$. 又因为 $\overrightarrow{CE}=n\overrightarrow{EA}$，故由定比分点公式得 $E\left(0,\dfrac{n}{1+n}\right)$.

因为 G 是 BE 与 AD 的交点，所以存在实数 λ、μ，使

$$\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{GD},\quad G\left(\frac{\lambda}{(1+m)(1+\lambda)},\frac{m\lambda}{(1+m)(1+\lambda)}\right)$$

$$\overrightarrow{BG}=\mu\overrightarrow{GE},\quad G\left(\frac{1}{1+\mu},\frac{\mu}{(1+\mu)(1+n)}\right)$$

由点的坐标的唯一性有

$$\begin{cases}\dfrac{\lambda}{(1+m)(1+\lambda)}=\dfrac{1}{1+\mu}\\[2ex]\dfrac{m\lambda}{(1+m)(1+\lambda)}=\dfrac{\mu}{(1+n)(1+\mu)}\end{cases}$$

解之得 $$\mu = m(1+n)$$

所以 $$G\left(\frac{1}{1+m(1+n)}, \frac{m}{1+m(1+n)}\right)$$

故 $$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{1+m(1+n)}\{1, m\}$$

$$= \frac{1}{1+m(1+n)}\vec{a} + m\vec{b}$$

评注

由以上两例可知：

1° 用已知矢量表示某一矢量时，

(1)选取标架(一般以已知矢量为标架的底矢)；

(2)求出所求矢量的终点、始点坐标；

(3)终点坐标减去始点坐标得矢量在标架下的分量；

(4)根据坐标定义定出具体表达式.

2° 求直线 AB、CD 的交点坐标时，

(1)首先写出 A、B、C、D 在标架下的坐标，设为 $A(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$、$C(x_3, y_3, z_3)$、$D(x_4, y_4, z_4)$；

(2)设 G 是 AB 与 CD 的交点，即

$$\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{CG} = \mu\overrightarrow{GB}$$

(3)用 A、B 坐标及 λ 写出 G 的坐标，用 C、D 坐标及 μ 写出 G 的另一坐标，由定比分点公式

$$G\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right) \tag{1}$$

$$G\left(\frac{x_3+\mu x_4}{1+\mu}, \frac{y_3+\mu y_4}{1+\mu}, \frac{z_3+\mu z_4}{1+\mu}\right) \tag{2}$$

(4)根据坐标唯一性得

$$\begin{cases} \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\dfrac{x_3+\mu x_4}{1+\mu} \\ \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\dfrac{y_3+\mu y_4}{1+\mu} \\ \dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}=\dfrac{z_3+\mu z_4}{1+\mu} \end{cases}$$

(5)解方程组得 λ、μ 之值，代入式(1)或式(2)即得 G 点坐标.

注意 在求点的坐标时，经常用定比分点的坐标.

例5 证明：四面体的顶点与对面重心的连线共点.

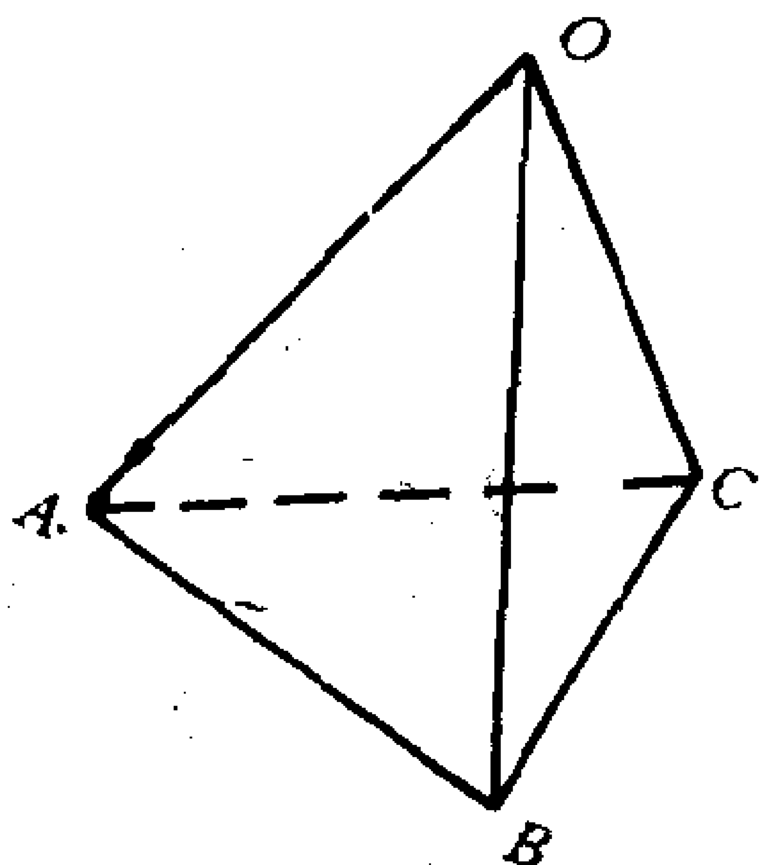


图 5—18

解 选坐标系 $\{o;\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$，则 $O(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 重心坐标为 $G_1\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$；

$\triangle BCO$ 重心坐标为 $G_2\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$；

$\triangle COA$ 重心坐标为 $G_3\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right)$；

$\triangle AOB$ 重心坐标为 $G_4\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$.

首先证明 OG_1 与 AG_2 相交于一点，并求其交点的坐标.

设 H_1 是 OG_1 上一点，$\overrightarrow{OH_1}=\lambda\,\overrightarrow{H_1G_1}$，则 H_1 点坐标为

$$H_1\left(\frac{\frac{1}{3}\lambda}{1+\lambda},\frac{\frac{1}{3}\lambda}{1+\lambda},\frac{\frac{1}{3}\lambda}{1+\lambda}\right)$$

设 H_2 是 AG_2 上一点，$\overrightarrow{AG_2}=\mu\,\overrightarrow{H_2G_2}$，则

$$H_2\left(\frac{1}{1+\mu},\frac{\frac{1}{3}\mu}{1+\mu},\frac{\frac{1}{3}\mu}{1+\mu}\right)$$

求使 H_1 与 H_2 重合之 λ、μ 值：

$$\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{3}\lambda}{1+\lambda}=\dfrac{1}{1+\mu}\\[2ex]\dfrac{\frac{1}{3}\lambda}{1+\lambda}=\dfrac{\frac{1}{3}\lambda}{1+\mu}\end{cases}\quad \text{解之得}\quad \lambda=\mu=3$$

所以，OG_1 与 AG_2 的交点坐标为 $H_1\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$. 同理可证 OG_1 与 BG_3，OG_1 与 CG_4 都相交，且交点坐标都是 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$，所以四线相交于一点.

评注

1° 上述证明中，在求出 OG_1 与 AG_2 的交点 H_1 之后，也可验证 H_1 在另外两条直线上即可.

2° 从上例可以看出，在利用坐标证明 n 条直线相交于一点时，

(1)建立适当的坐标系；

(2)求出有关点的坐标；

(3)首先取两条直线，如 AB、CD（证明它们相交于一点），A、B、C、D 坐标为 (x_i,y_i,z_i)；

(4)取 O_1 在 AB 上，设 $\overrightarrow{AO_1}=\lambda\overrightarrow{O_1B}$；取 O_2 在 CD 上，设 $\overrightarrow{CO_2}=\mu\overrightarrow{O_2D}$. 则

$$O_1\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$$

$$O_2\left(\frac{x_3+\mu x_4}{1+\mu},\frac{y_3+\mu y_4}{1+\mu},\frac{z_3+\mu z_4}{1+\mu}\right)$$

(5)解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\dfrac{x_3+\mu x_4}{1+\mu}\\[2mm]\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\dfrac{y_3+\lambda y_4}{1+\mu}\\[2mm]\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}=\dfrac{z_3+\mu z_4}{1+\mu}\end{cases}$$

(6)若方程组无解，则直线不相交；若方程组有解，将其解代入O_1或O_2的坐标中，得到的即为交点坐标；

(7)验证此点在另外的几条直线上.

3° 在利用坐标证明问题时，一般首先建立坐标系，然后求出所用点的坐标，最后验证它满足一定的性质.

习　题　5.4

1. 利用坐标法证明三角形三中线共点.

2. 利用坐标法证明四面体对棱中点连线共点，且相互平分.

3. 已知空间四边形 $ABCD$，将 AB、AC、DB 及 CD 依次同比分之，则四个分点必成一个平行四边形.

4. 证明：$\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{2(k-1)\pi}{n}=0\quad\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{2(k-1)\pi}{n}=0$

§5.5　数性积、矢量在轴上的射影

一、基本内容

(1)设矢量$\overrightarrow{AB}$的终点 B 和始点 A 在轴 l 上的射影点分

别为 B'、A'，那么矢量$\overrightarrow{A'B'}$叫做矢量$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的射影矢量，记作射影矢量 $l^{\overrightarrow{AB}}=\overrightarrow{A'B'}$.

(2)设 $\vec{e}$为 l 上的单位矢量，则射影矢量 $l^{\overrightarrow{AB}}=x\vec{e}$，称 x 为矢量$\overrightarrow{AB}$在 l 上的射影，记射影 $l^{\overrightarrow{AB}}$.

(3)射影 $l^{\overrightarrow{AB}}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \theta=\angle(l,\overrightarrow{AB})$.

(4)$\sum\limits_{i=1}^{n}$射影 $l^{\lambda_i\vec{a}_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$ 射影 $l^{\vec{a}_i}$.

(5)两矢量 $\vec{a}$和 $\vec{b}$的模与它们夹角余弦的乘积叫做矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$的数性积(内积、点积)，记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$或 $\vec{a}\vec{b}$，记 $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2$.

(6)$\vec{a}$垂直于 $\vec{b}$的充要条件是 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

(7)$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(8)$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

(9)$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(10)$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|$射影 $\vec{a}^{\vec{b}}=|\vec{b}|$射影 $\vec{b}^{\vec{a}}$

设 $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$

(11)$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

(12)$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

其中 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$

(13)$\cos\alpha=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

(14)设$|\vec{a}|\neq0$，则其方向余弦

$$\cos\alpha=x_1\Big/\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

$$\cos\beta = y_1 \Big/ \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$\cos\gamma = z_1 \Big/ \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

且 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

即有 $\vec{a}^\circ = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

二、常用方法及应用举例

例1 导出$(\vec{a}\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$成立的条件

解 当 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \Rightarrow \vec{a}(\vec{b}\vec{c})=0$

所以 $\vec{a}=\vec{0}$或 $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

即 $\vec{a}$与 $\vec{c}$共线，或 $\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{b}\perp\vec{c}$，当 $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq0$时，则 $\vec{c}=\dfrac{(\vec{b}\vec{c})}{(\vec{a}\vec{b})}\vec{a}$，即 $\vec{a}$与 $\vec{c}$共线.

反之若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，且 $\vec{b}\perp\vec{c}$，则等式显然成立，当 $\vec{a}$与 $\vec{c}$共线时，不妨设 $\vec{a}=\lambda\vec{c}$，则

$$(\vec{a}\vec{b})\vec{c} = (\lambda\vec{c}\vec{b})\vec{c} = \lambda(\vec{c}\vec{b})\vec{c} = (\vec{c}\vec{b})(\lambda\vec{c}) = \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$$

因为，$(\vec{a}\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\vec{c})$成立的充要条件是：(1) $\vec{a}\perp\vec{b}$，且 $\vec{b}\perp\vec{c}$；(2) $\vec{a}$与 $\vec{c}$共线. 至少一个成立.

评注 从上例可以看出，在进行矢量的运算时，如果数量是以两矢量的数性积形式给出的，那么这个数性积在运算中不能分开.

例2 证明矢量 $\vec{a}$与 $\vec{b}-\vec{a}(\vec{a}\vec{b})/\vec{a}^2$垂直.

证明 $\because$ $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}(\vec{a}\cdot\vec{a})$

$$=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\therefore \quad \vec{a}\perp\vec{b}-\frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}$$

例3 证明矢量 $\vec{a}$ 与 $(\vec{a}\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$ 垂直.

证明 $\because \vec{a}\cdot[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\vec{b})\vec{c}]$

$$=(\vec{a}\vec{c})(\vec{a}\vec{b})-(\vec{a}\vec{b})(\vec{a}\vec{c})$$

$$=0$$

$\therefore\quad \vec{a}\perp(\vec{a}\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$

评注 由于 $(\vec{a}\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\vec{c})$ 成立是有条件的，所以，下列运算是错误的

$$\vec{a}\cdot[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}]$$

$$=\vec{a}\cdot(\vec{a}\vec{c})\vec{b}-\vec{a}(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$$

$$=(\vec{a}\vec{a})(\vec{c}\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\vec{c})=0$$

例4 设一四边形各边之边长是 a、b、c、d，且其对角线相互垂直，求证各边之长也是 a、b、c、d 的任一四边形的两条对角线也互相垂直.

证明 设四边形 $ABCD$ 及 $A'B'C'D'$ 各边作成的向量分别是 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{c}$，$\overrightarrow{DA}=\vec{d}$，$\overrightarrow{A'B'}=\vec{a}'$，$\overrightarrow{B'C'}=\vec{b}'$，$\overrightarrow{C'D'}=\vec{c}'$，$\overrightarrow{D'A'}=\vec{d}'$，且 $|\vec{a}|=|\vec{a}'|=a$，$|\vec{b}|=|\vec{b}'|=b$，$|\vec{c}|=|\vec{c}'|=c$，$|\vec{d}|=|\vec{d}'|=d$.

由 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$，得

$$\vec{d}^2=[-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})]^2$$

$$=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=\vec{a}^2-\vec{b}^2+\vec{c}^2+2(\vec{b}^2+\vec{b}\vec{c}+\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c})$$

$$\therefore \vec{d}^2-\vec{a}^2+\vec{b}^2-\vec{c}^2=2(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$$

同理可证 $\vec{d}^2-\vec{a}^2+\vec{b}^2-\vec{c}^2=2\overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{B'D'}$

$\therefore\quad \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{B'D'}$

故$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}\Rightarrow\overrightarrow{A'C'}\perp\overrightarrow{B'D'}$.

例5 如果一个四面体有两对对棱互相垂直，则第三对对棱也必垂直，而且三对对棱的平方和相等.

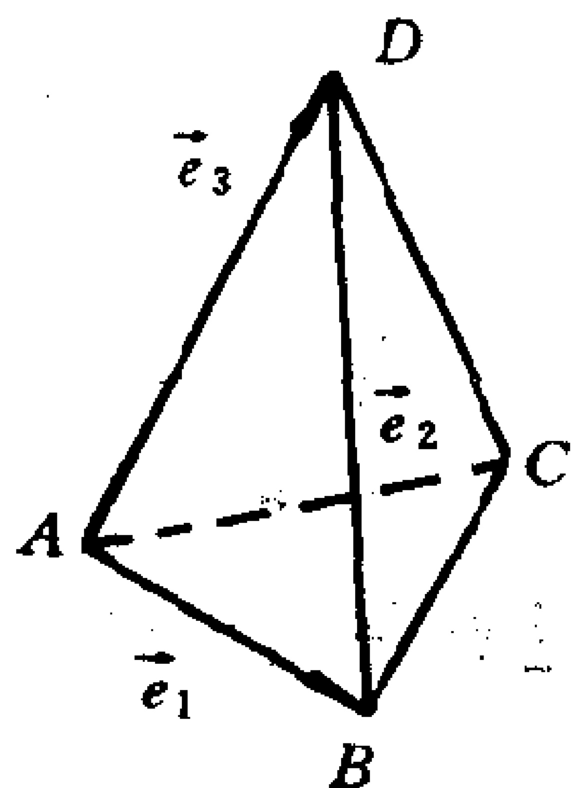


图 19

证明 设$\overrightarrow{AB}=\vec{e}_1$，$\overrightarrow{AC}=\vec{e}_2$，$\overrightarrow{AD}=\vec{e}_3$.

已知$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，证明$\overrightarrow{AD}$垂直$\overrightarrow{BC}$.

$$\because\quad \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$$

$$\therefore\quad \vec{e}_1(\vec{e}_3-\vec{e}_2)=0$$

$$\vec{e}_1\vec{e}_3=\vec{e}_1\vec{e}_2 \tag{1}$$

又$\because\ \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$

$\therefore\quad \vec{e}_2(\vec{e}_3-\vec{e}_1)=0$

即 $\vec{e}_1\vec{e}_2=\vec{e}_2\vec{e}_3$ (2)

由(1)、(2)知，$\vec{e}_1\vec{e}_3=\vec{e}_2\vec{e}_3=\vec{e}_1\vec{e}_2$ (3)

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{e}_3\cdot(\vec{e}_2-\vec{e}_1)=\vec{e}_3\vec{e}_2-\vec{e}_3\vec{e}_1=0$

$\therefore\quad \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$

另外，$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=\vec{e}_1^{\,2}+(\vec{e}_3-\vec{e}_2)^2=\vec{e}_1^{\,2}+\vec{e}_3^{\,2}+\vec{e}_2^{\,2}-2\vec{e}_2\vec{e}_3$

$\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=\vec{e}_2^{\,2}+(\vec{e}_3-\vec{e}_1)=\vec{e}_1^{\,2}+\vec{e}_2^{\,2}+\vec{e}_3^{\,2}-2\vec{e}_1\vec{e}_3$

$\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2=\vec{e}_3^{\,2}+(\vec{e}_2-\vec{e}_1)^2=\vec{e}_1^{\,2}+\vec{e}_2^{\,2}+\vec{e}_3^{\,2}-2\vec{e}_1\vec{e}_2$

所以 $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2$

评注 由以上两例可以看出：

1° 在进行矢量运算时，可以把所用到的矢量都表示成坐

标矢量的线性组合，然后进行运算.

2° 在证明两直线垂直时，可把问题转化成这两条直线的方向矢量（与直线平行的非零矢量）的垂直问题，进而转化为两矢量数性积为零的问题.

3° 在证明有关长度的等式时，首先将数量等式转化成矢量等式，即用矢量的模表示线段的长度，其次运用公式 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2}$，使问题转化为有关矢量数性积的等式的证明问题.

例6 在 $\triangle ABC$ 中，如图5－20所示，已知 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，求高线 AD 上的一个矢量.

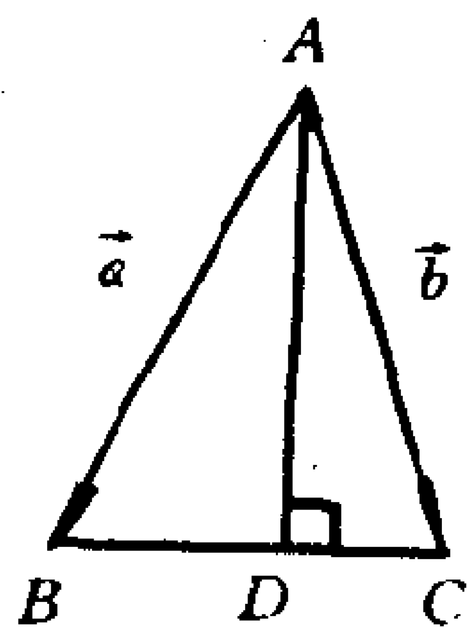


图5－20

解 设 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{DC}$，则

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BC}$$

$$=\vec{a}+\frac{\lambda}{1+\lambda}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=\vec{a}\left(1-\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)+\frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{b}$$

$$=\frac{\vec{a}}{1+\lambda}+\frac{\lambda\vec{b}}{1+\lambda}$$

$$\because\quad \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$$

$$\therefore 0=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{1+\lambda}\vec{a}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{b}\right)(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=\frac{1}{1+\lambda}\vec{a}\vec{b}-\frac{1}{1+\lambda}\vec{a}^2+\frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{b}^2-\frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{a}\vec{b}$$

故 $\quad \lambda(\vec{b}^2-\vec{a}\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{a}\vec{b}$

所以
$$\lambda=\frac{\vec{a}^2-\vec{a}\vec{b}}{\vec{b}^2-\vec{a}\vec{b}}$$

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\vec{b}^2-\vec{a}\vec{b}}{(\vec{a}-\vec{b})^2}\vec{a}+\frac{\vec{a}^2-\vec{a}\vec{b}}{(\vec{a}-\vec{b})^2}\vec{b}$$

评注 从此例可以看出，在求与垂直有关的矢量时，总可以利用待定系数法，引入一个参数，然后利用垂直这一条件得一个含参数的数量方程，解此方程，求出参数之值，反代即可.

例7 试证三角形三边上的高共点.

证明 设BC、AC边上的高相交于H，设$\overrightarrow{HA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{HB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{HC}=\vec{c}$，要证明三高相交于一点，只须证明$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$.

$\because\ \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$

$\therefore 0=\vec{a}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{a}\cdot(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HC})=\vec{a}(-\vec{b})+\vec{a}\vec{c}$

即 $\vec{a}\vec{b}=\vec{a}\vec{c}$ (1)

又 $\because\overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{AC}$

$\therefore\vec{b}\vec{a}=\vec{b}\vec{c}$ (2)

由(1)、(2)知 $\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}$

即 $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}=0$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{HC}$

评注 从本例可看出，证明三线共点的问题，可以转化为两矢量垂直的问题.

例8 设在$\triangle ABC$中，三边BC、CA、AB之长分别为a、b、c，AD是三角形的中线，则AD的长度$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

证明 设$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$

则 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})$

$$\therefore\quad m_a=\frac{1}{2}\sqrt{(\vec{c}-\vec{b})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\vec{c}^2+\vec{b}^2-2\vec{b}\vec{c}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\vec{b}^2+\vec{c}^2+(\vec{b}^2+\vec{c}^2-\vec{a}^2)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2\vec{b}^2+2\vec{c}^2-\vec{a}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

例9 已知单位矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$满足条件 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，试计算 $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}$.

解 $0=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$

$$=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2(\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a})$$

$$\therefore \vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}=-\frac{1}{2}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2)=-\frac{3}{2}$$

评注 从以上两例可以看出，在证明有关长度，或计算数值问题时，往往可以根据已知的矢量等式，两端分别平方，或两端同时与一个矢量（或与此相等的矢量）作内积来证明. 这一方法也可以用于有关矢量相等、两矢量垂直、射影、夹角等问题中.

例10 证明余弦定理.

证明 设$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$|\vec{c}|=c$，$|\vec{a}|=a$，$|\vec{b}|=b$

则 $\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$

两端平方得

$$\vec{a}^2=\vec{b}^2+\vec{c}^2-2\vec{b}\vec{c}$$

$$=\vec{b}^2+\vec{c}^2-2|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle(\vec{b},\vec{c})$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$$

即 $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

同样方法可得

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba\cos C$$

评注 注意三角形的内角和夹这个角的两边上的矢量之间夹角的关系，要么相等要么互补.

例11 利用数性积证明：

(1) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,

(2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.

证明 (1)仅取 $\alpha、\beta、\alpha-\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$来证明，至于其他情况由诱导公式知必然成立.

取 $\vec{a}=\{\cos\alpha,\sin\alpha,0\}$

$\vec{b}=\{\cos\beta,\sin\beta,0\}$

则 $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

故 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(2)取 $\vec{a}=\{\cos(90°+\alpha),\sin(90°+\alpha),0\}$

$\vec{b}=\{\cos\beta,\sin\beta,0\}$

则 $\sin(\alpha-\beta)=-\cos[(90°+\alpha)-\beta]$

$=-\cos(90°+\alpha)\cos\beta-\sin(90°+\alpha)\sin\beta$

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

评注 由以上两例知道，可以利用数性积来证明三角恒等式，一般是

(1)取与 xoy 面平行的两个单位矢量，而在选这两个量时应考虑到证明等式中角与角之间的关系.

(2)利用数性积的定义及数性积的坐标形式,求得两数性积之值,则它们相等.

(3)选取角度的一特殊取值范围,证明等式成立.

(4)利用诱导公式将其推广.

例12 证明柯西-施瓦尔茨不等式

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^3}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}.$$

证明 取$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$

$\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$

则

$$\begin{aligned}&(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2\cos^2\angle(\vec{a},\vec{b})\\&\leqslant\vec{a}^2\vec{b}^2=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\end{aligned}$$

即

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$$

评注 从本例可以看出,可以利用矢量来证明不等式,重要的是选取特殊的矢量.

例13 设有两条直线l_1和l_2,其中l_1通过点$P_1(3,0,1)$,且平行于$\vec{v}_1=\{2,1,0\}$,l_2通过$P_2(-1,2,0)$,且平行于$\vec{v}_2=\{1,0,1\}$,求l_1与l_2的距离.

解 l_1、l_2的公垂线夹在两条直线间的线段的长即为l_1与l_2的距离,所以,两直线间距离为

$$d=|\text{射影}\ P^{\overrightarrow{P_1P_2}}_{\vec{v}_1\times\vec{v}_2}|=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\frac{\vec{v}_1\times\vec{v}_2}{|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}\right|$$

$$=\left|\{4,-2,1\}\cdot\frac{\{1,-2,1\}}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}\right|$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{6}$$

评注

1° 求两直线的距离，可以转化为某一矢量在其某一方向上的射影的绝对值.

2° 这个方法可以推广到点到直线、点到平面、直线到平面，以及平面到平面的距离的求解.

例14 求两平行平面 π_1、π_2的距离，其中，π_1通过 $P_1(2,1,0)$，π_2通过 $P_2(3,0,2)$，且都垂直于 $\vec{n}=\{1,2,2\}$.

解 两平行平面间的距离等于这两个平面的公垂线夹在两平面间的线段的长度.

故 $d(\pi_1,\pi_2)=|\text{射影}_{\vec{n}}\overrightarrow{P_1P_2}|=\vec{n}^{\circ}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=1$

例15 设 a、b、c 分别是$\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 之长，Δ是三角形的面积，证明 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\Delta$.

证明 设$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$.

则 $|\vec{a}|=a$，$|\vec{b}|=b$，$|\vec{c}|=c$.

$$\because\quad 4\Delta^2=(\vec{a}\times\vec{b})^2$$

$$=\vec{a}^2\vec{b}^2\sin^2\angle(\vec{a},\vec{b})$$

$$=\vec{a}^2\vec{b}^2[1-\cos^2\angle(\vec{a},\vec{b})]$$

$$=\vec{a}^2\vec{b}^2\left[1-\left(\frac{\vec{a}^2+\vec{b}^2-\vec{c}^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2\right]$$

$$=\vec{a}^2\vec{b}^2-\frac{1}{4}(\vec{a}^2+\vec{b}^2-\vec{c}^2)^2$$

$$\therefore\quad 16\Delta^2=(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2)^2-2(\vec{a}^4+\vec{b}^4+\vec{c}^4)$$

$$\leqslant(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2)^2$$

故 $\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2\geqslant 4\Delta$，即 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\Delta$

评注 从此例知道，可以用矢量法证明三角不等式，在此必须注意矢量运算的几何意义和性质，以及完成数和矢量关系的转化.

习 题 5.5

1. 证明：三角形三条垂线共点.

2. 设 $ABCD$ 是平行四边形，证明：

$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DA}^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2$$

3. 若 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$不共面，$\vec{a}\vec{x}=\vec{b}\vec{x}=\vec{c}\vec{x}=0$，则 $\vec{x}=\vec{0}$.

4. 若 $\vec{r}$是任一矢量，且 $\vec{r}\vec{x}=\vec{0}$，则 $\vec{r}=\vec{0}$.

5. 证明三矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} \vec{a}\vec{a} & \vec{a}\vec{b} & \vec{a}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{b} & \vec{b}\vec{b} & \vec{b}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{c} & \vec{b}\vec{c} & \vec{c}\vec{c} \end{vmatrix}=0.$$

6. 等腰三角形底边中线垂直于底边.

7. 立于直径上的圆周角是直角.

8. 已知$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，试确定 λ 为何值时，矢量 $\vec{a}+\lambda\vec{b}$与 $\vec{a}-\lambda\vec{b}$ 垂直.

9. 证明三角形三条中线的长度的平方和等于三边长度的平方和的 $\frac{3}{4}$.

10. 若 $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n=\vec{0}$，证明：

$$\left|\sum_{i<j}\vec{a}_i\vec{a}_j\right|=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i}\vec{a}_i^2$$

11. 求正方体的两对角线交成的锐角.

12. 已知矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$的分量如下，求 $\vec{a}$、$\vec{b}$间的夹角及 $\vec{a}$在 $\vec{b}$方向上的射影.

(1)$\vec{a}=\{8,4,1\}$，$\vec{b}=\{2,-2,1\}$

(2)$\vec{a}=\{2,5,4\}$，$\vec{b}=\{6,0,8\}$

13. 已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$两两构成60°角，且$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=6$，试求 $\vec{P}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$的长度及 $\vec{P}$与 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$的夹角.

14. 若矢量 $\vec{a}+3\vec{b}$垂直于矢量$7\vec{a}-5\vec{b}$，且矢量 $\vec{a}-4\vec{b}$垂直于矢量$7\vec{a}$

$-2\vec{b}$,求矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$的夹角.

15. 证明:$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

16. 证明:平行四边形为菱形的充要条件是对角线相互垂直.

17. 求证:空间四边形的平方和等于对角线平方和加上对角线中点的连线平方和的四倍.

18. 消去律是否成立.

§5.6 矢性积

一、基本内容

(1)两矢量 $\vec{a}$和 $\vec{b}$的矢性积(称外积,叉积)是一个矢量,记作 $\vec{a}\times\vec{b}$,它的模是 $\vec{a}$的模、$\vec{b}$的模及它们夹角正弦的乘积,它的方向与 $\vec{a}$、$\vec{b}$都垂直,并且按 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{a}\times\vec{b}$构成右手系.

(2)当 $\vec{a}$、$\vec{b}$不共线时,$|\vec{a}\times\vec{b}|$表示以 $\vec{a}$、$\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积.

(3)$\vec{a}$与 $\vec{b}$共线的充要条件是 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

(4)$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

(5)$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

(6)$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

(7)$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$

(8)设 $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$,$\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$,则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

(9)$\vec{a}$与 $\vec{b}$共线的充要条件是对应分量成比例.

(10)消去律、交换律、结合律不成立.

(11) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\vec{c})\vec{a}$

二、常用方法以及应用举例

例1 证明：如果 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$，$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$，那么 $\vec{a}-\vec{d}$ 与 $\vec{b}-\vec{c}$ 共线.

证明 ∵ $(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c})$

$=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{d}\times\vec{b}+\vec{d}\times\vec{c}=\vec{0}$

∴ $\vec{a}-\vec{d}$ 与 $\vec{b}-\vec{c}$ 共线

例2 三矢量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 适合

$$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

证明：三点 A、B、C 共线.

证明 ∵ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\times(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OA}$

$=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\vec{0}$

∴ $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线，故 A，B，C 共线.

评注 从以上两例可以看出：

1° 证明三点共线的问题可以转化为证明两矢量的共线问题.

2° 证明两矢量的共线问题，可以计算这两个矢量的矢性积是零矢量.

另外，证明三点共线或两矢量共线的问题，可以转化为证明两矢量的对应分量成比例的问题.

例3 已知 $A(0,0,0)$，$B(1,0,2)$，$C(2,0,1)$，求 $\triangle ABC$ 的面积及 BC 上的高.

解 $S_{\triangle}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$$= \frac{1}{2}|\{1,0,2\} \times \{2,0,1\}|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left\{\begin{vmatrix}0 & 2\\0 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1, & 0\\2, & 0\end{vmatrix}\right\}\right|$$

$$= \frac{1}{2}|\{0,3,0\}| = \frac{3}{2}$$

$$\because \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$\therefore$ A 到 BC 的距离即 BC 边上的高为

$$h = \frac{2S_{\triangle}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

例4 求证:三角形的重心分原三角形为三个等积的三角形.

证明 见图5－21,设 G 是三角形 ABC 的重心,下面证明$\triangle ABG$、$\triangle BCG$、$\triangle CAG$ 的面积相等. 设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$,$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$,则$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$,$\overrightarrow{BG}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

$$\therefore S_{\triangle ABG} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AG}|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})\right|$$

$$= \frac{1}{6}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$S_{\triangle BCG} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BG} \times \overrightarrow{BC}|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \times (\vec{b} - \vec{a})\right|$$

$$= \frac{1}{6}|-2\vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a}|$$

$$= \frac{1}{6}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$S_{\triangle CAG} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}\right|$$

$$= \frac{1}{6}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

所以，这三个三角形面积相等.

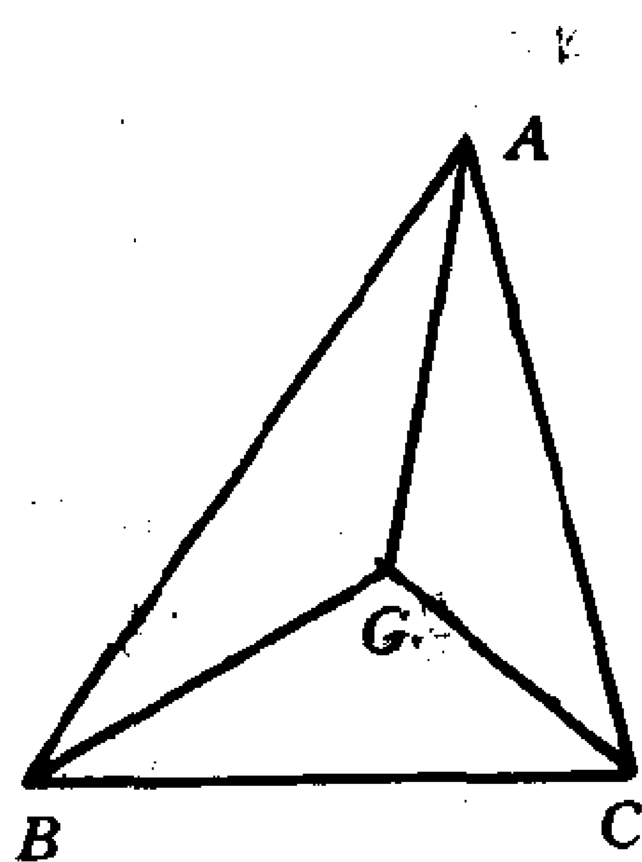


图 7-21

评注

1° 可以利用矢性积的几何意义来求三角形的面积、平行四边形的面积.

2° 也可用矢性积的几何意义求任一多面形的面积，这时只须将 n 边形化为 $n-2$ 个三角形的面积来计算，然后求和即可.

3° 在证明若干个图形等积时，

(1)选两个不共线的矢量；

(2)将各图形化为若干个三角形；

(3)用选定的两不共线矢量表示每个三角形边上的矢量；

(4)将各图形的面积都用两不共线矢量的矢性积矢量的模来表示，即可得出各图形面积之间的关系.

例5 证明三角形的正弦定理.

分析 设$\triangle ABC$三边上的矢量$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，且$|\vec{a}|=a$，$|\vec{b}|=b$，$|\vec{c}|=c$，要证明$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，首先证明$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即

$$a\sin B = b\sin A \qquad \text{亦即} \qquad ac\sin B = bc\sin A$$

所以，只须证明，$ac\sin\angle(\vec{a},\vec{c})=bc\sin\angle(\vec{b},\vec{c})$

故只须证明 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{b}\times\vec{c}|$

证明 因为 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

两端同时$\times\vec{c}$，得 $\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{c}=\vec{0}$

所以 $\vec{a}\times\vec{c}=-\vec{b}\times\vec{c}$

故 $|\vec{a}\times\vec{c}|=|\vec{b}\times\vec{c}|$

因此 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

即 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

例6 用矢量法证明三角公式

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

证明 仅对 α、β、$\alpha-\beta$ 均在 $\left[0,\dfrac{2}{\pi}\right]$ 上取值来进行证明，对于其他情况利用诱导公式易证是正确的.

取 $\vec{a}=\{\cos\alpha,\sin\alpha,0\}$，$\vec{b}=\{\cos\beta,\sin\beta,0\}$

$\because$ $\alpha-\beta\geqslant 0$，$\therefore \alpha\geqslant\beta$

$\because \cos\beta\geqslant\cos\alpha$，$\sin\alpha\geqslant\sin\beta$

$\therefore \sin\alpha\cos\beta\geqslant\sin\beta\cos\alpha$

一方面 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\alpha-\beta)$

另一方面 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\{\cos\alpha,\sin\alpha,0\}\times\{\cos\beta,\sin\beta,0\}|$

$=|\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta|$

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\therefore$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

评注 从以上两例可以看出：

1° 可以利用两矢量的矢性积来证明有关正弦函数的等

式.

2° 在证明三角恒等式时，

(1)选取适当的矢量；

(2)适当选取矢量的方向角的取值范围；

(3)利用矢量积定义、坐标表示写出两种表示形式，然后由它们的模相等得出一个三角恒等式；

(4)利用诱导公式，将角度的取值范围加以扩大即可.

例7 用矢量法证明三角形 ABC 面积的海伦公式成立，即

$$\Delta^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

其中， $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$；Δ 为面积.

证明 设$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，且令$|\vec{a}|=a$，$|\vec{b}|=b$，$|\vec{c}|=c$，则有

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

于是$\Delta^2=\left|\frac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b})\right|^2$

$$=\frac{1}{4}[\vec{a}^2\vec{b}^2-(\vec{a}\vec{b})^2]$$

$$=\frac{1}{4}[a^2b^2-(\vec{a}\vec{b})^2]$$

$$=\frac{1}{4}(ab-\vec{a}\vec{b})(ab+\vec{a}\vec{b})$$

$$=\frac{1}{16}(2ab-2\vec{a}\vec{b}+\vec{a}^2-\vec{a}^2+\vec{b}^2-\vec{b}^2)$$

$$\cdot(2ab+2\vec{a}\vec{b}+\vec{a}^2-\vec{a}^2+\vec{b}^2-\vec{b}^2)$$

$$=\frac{1}{16}[(a+b)^2-(\vec{a}+\vec{b})^2][(\vec{a}+\vec{b})^2-(a-b)^2]$$

$$= \frac{1}{16}[(a+b)^2 - \vec{c}^2][\vec{c}^2 - (a-b)^2]$$

$$= \frac{1}{16}[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]$$

$$= \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$$

$$= p(p-a)(p-b)(p-c)$$

评注：

1° 在本题的证明中，巧妙地应用了

(1)矢量的平方等于矢量模的平方；

(2)两矢量矢性积，数性积，它们的模的乘积之关系.

2° 本题证明还可以采用如下方法

$$\Delta^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\angle(\vec{a},\vec{b})$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2[1 - \cos^2\angle(\vec{a},\vec{b})]$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2\left[1 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{16}(a^2+b^2-c^2+2ab)(2ab-a^2-b^2-c^2)$$

$$= \frac{1}{16}[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]$$

$$= \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$$

$$= p(p-a)(p-b)(p-c)$$

习　题　5.6

1. 举例说明消去律、结合律不成立，并导出$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$成立的条件.

2. 证明$(\vec{a}\times\vec{b})^2\leqslant\vec{a}^2\vec{b}^2$并说明等号成立的条件及本不等式的几何意义.

3. 已知两矢量$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$不共线，如果$\overrightarrow{AB}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=2\vec{e}_1+8\vec{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=3(\vec{e}_1-\vec{e}_2)$，证明$A$、$B$、$D$共线.

4. 如果$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线，系数α为何值时，向量$\vec{p}=\alpha\vec{a}+5\vec{b}$和$\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$共线.

5. 设两矢量$\vec{e}_1$和$\vec{e}_2$不共线，确定α之值，使两矢量$\vec{p}=k\vec{e}_1+\vec{e}_2$和$q=\vec{e}_1+k\vec{e}_2$共线.

6. 设$O(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，求$\triangle OAB$的面积及AB边上的高.

7. 如果$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}=0$　证明：$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$，并说明其几何意义.

8. 已知$\vec{a}$、$\vec{b}$两矢量不共线，求证：$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$，并说明其几何意义.

9. 证明$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

10. 设$\vec{a}_1'=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2$，$\vec{a}_2'=\mu_1\vec{a}_1+\mu_2\vec{a}_2$，其中$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$和$\vec{a}_1'$和$\vec{a}_2'$是非零的不共线矢量，求证分别以$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$；$\vec{a}_1'$，$\vec{a}_2'$为邻边的两个平行四边形面积相等的充要条件是$|\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1|=1$.

11. 证明：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{a}\vec{a}' & \vec{a}\vec{b}' \\ \vec{b}\vec{a}' & \vec{b}\vec{b}'\end{vmatrix}$

§5.7　矢量的混合积

一、基本内容

(1)给定空间三个矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，如果先作前面两个矢量的矢性积$\vec{a}\times\vec{b}$，然后再与第三个矢量$\vec{c}$作数性积$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$，最

后得到一个数量叫做 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$的混合积，记作$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

(2)三矢量共面的充要条件是它们的混合积为零.

(3)三矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$不共面，则$|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|$等于以 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$为棱的平行六面体的体积，并且当 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$构成右手系时，混合积之值取正，否则取负.

(4)设 $\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$，$\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$，$\vec{c}=\{X_3,Y_3,Z_3\}$，则

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

(5)轮换混合积的三个因子，并不改变其混合积之值，对调任何两个因子要改变乘积的符号.

(6)$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

二、常用方法及应用举例

例1 已知空间四点的坐标 $A(0,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,1,1)$，$D(1,1,1)$，求四面体 $ABCD$ 的体积及 A 到 BCD 平面的距离.

解 由初等几何知识，四面体 $ABCD$ 的体积 V 等于以 AB、AC、AD 为棱的平行六面体的体积的1/6.

$$\therefore\quad V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}$$

另外设 A 到 BCD 所确定平面的距离为 d，则

$$V=\frac{1}{6}|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}|\cdot d=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot d$$

$\therefore\quad d=1$

评注

1° 求四面体的体积时，首先求出以同一顶点为始点的三棱上的矢量，然后求这三矢量的混合积，取其绝对值的1/6即为四面体的体积.

2° 多面体的体积可以转化为若干个四面体的体积的和，即问题转化为求四面体体积.

3° 求点 A 到平面 π 的距离时，

(1)取 π 上三个点 B,C,D；

(2)求出$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$；

(3)求出以$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$为棱的平行六面体的体积$|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|$；

(4)求出以$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{BD}$为邻边的平行四边形的面积$|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}|$；

(5)求出点到平面的距离 d，即

$$d=\frac{|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|}{|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}|}$$

例2 求证三矢量$\lambda\vec{a}-\mu\vec{b},\mu\vec{b}-\nu\vec{c},\nu c-\lambda\vec{a}$共面.

证明 $\because(\lambda\vec{a}-\mu\vec{b},\mu\vec{b}-\nu\vec{c},\nu\vec{c}-\lambda\vec{a})$

$=[(\lambda\vec{a}-\mu\vec{b})\times(\mu\vec{b}-\nu\vec{c}]\cdot(\nu\vec{c}-\lambda\vec{a})=0$

$\therefore$ 三矢量共面.

例3 证明四点 $A_i(a_{i1},a_{i2},a_{i3})(i=1,2,3,4)$共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

证明 A_1, A_2, A_3, A_4四点共面

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$三矢量共面

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & a_{33}-a_{13} \\ a_{41}-a_{11} & a_{42}-a_{12} & a_{43}-a_{13} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

评注

1° 证明三矢量共面的问题转化为证明这三矢量的混合积等于零.

2° 证明 A、B、C、D 共面时,

(1)计算$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$;

(2)证明$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.

例4 设 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$为三个不共面的矢量,求矢量 $\vec{d}$对于 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$的分解式.

解 因为 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$不共面,所以根据矢量的分解原则,总有

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

为了确定 x 的值,可在等式两边同时点乘矢量 $\vec{b}\times\vec{c}$,则

$$(\vec{d}\vec{b}\vec{c}) = x(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) + y(\vec{b}\vec{b}\vec{c}) + z(\vec{c}\vec{b}\vec{c})$$

而 $(\vec{b}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{c}\vec{b}\vec{c}) = 0, (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \neq 0$

∴ $$x = \frac{(\vec{d}\vec{b}\vec{c})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}$$

同理 $$y = \frac{(\vec{a}\vec{d}\vec{c})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}, z = \frac{(\vec{a}\vec{b}\vec{d})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}$$

$$\therefore \vec{d} = \frac{(\vec{d}\vec{b}\vec{c})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}\vec{a} + \frac{(\vec{a}\vec{d}\vec{c})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}\vec{b} + \frac{(\vec{a}\vec{b}\vec{d})}{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}\vec{c}$$

评注

1° 在利用待定系数法求矢量时，

(1) 首先将所求的矢量用参数和已知矢量表示出来；

(2) 求参数时，为求得其中一个参数，往往点乘上一个与要消去的参数相乘的矢量的垂直的矢量，从而达到消去参数的目的，而得到所求参数之值；

(3) 将所有的参数求出后反代回去即可求得所求矢量.

2° 在上述表达式中，一个矢量前面的系数是一个比值，其分母是$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$，而分子则是将矢量$\vec{d}$去替换此矢量在混合积中的位置.

3° 如果取直角坐标系，并设$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$的分量分别为

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} \quad \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$$
$$\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\} \quad \vec{d} = \{d_1, d_2, d_3\}$$

将分量代入上面的$\vec{d}$对$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$的分解式与x、y、z的表达式，容易看出，上面的解法正是解线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

的克莱姆法则.

例5 利用数性积的分配律,证明矢性积的分配律.

证明 设 $\vec{r}$是任一矢量

$$\because \vec{r}\cdot[\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}]$$

$$=\vec{r}\cdot[\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})]-\vec{r}(\vec{a}\times\vec{b})-\vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$$

$$=(\vec{r}\times\vec{a})\cdot(\vec{b}+\vec{c})-\vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})-\vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$$

$$=(\vec{r}\times\vec{a})\cdot\vec{b}+(\vec{r}\times\vec{a})\cdot\vec{c}-(\vec{r}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$$

$$-(\vec{r}\times\vec{a})\cdot\vec{c}=0$$

$$\therefore \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}=0$$

即 $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

评注

1° 证明两矢量相等,转化为这两矢量之差是零矢量.

2° 证明一个矢量是零矢量,转化为此矢量与任一矢量的数性积为零.

3° 用到了$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$,从而将矢性积的分配律问题转化为数性积的分配律.

例6 求方程组

$$\begin{cases}\vec{a}\times\vec{X}+\vec{b}\times\vec{Y}=\vec{c} & (A)\\ \vec{b}\times\vec{X}-\vec{a}\times\vec{Y}=\vec{d} & (B)\end{cases}$$

有解的充要条件,并求所有解。式中 $\vec{X}$,$\vec{Y}$是未知矢量,$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$,$\vec{d}$是已知矢量,且 $\vec{a}^2+\vec{b}^2\neq 0$

解

由 $\vec{a}\cdot(A)-\vec{b}\cdot(B)$可得

$$(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{b}\cdot\vec{d})=0 \qquad (1)$$

由 $\vec{b}\cdot(A)+\vec{a}\cdot(B)$可得

$$(\vec{b}\cdot\vec{c})+(\vec{a}\cdot\vec{d})=0 \qquad (2)$$

则(1)及(2)是方程组有解的必要条件. 下面证明它的充分性并求解.

由 $\vec{a}\times(A)+\vec{b}\times(B)$得

$$-(\vec{a}^2+\vec{b}^2)\vec{X}+\vec{a}[(\vec{a}\cdot\vec{X})-(\vec{b}\cdot\vec{Y})]+\vec{b}[(\vec{b}\cdot\vec{X})$$

$$-(\vec{a}\cdot\vec{Y})]=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{d})$$

若令

$$\begin{cases}c_1(\vec{a}^2+\vec{b}^2)=(\vec{a}\cdot\vec{X})-(\vec{b}\cdot\vec{Y}), & (1')\\ c_2(\vec{a}^2+\vec{b}^2)=(\vec{b}\cdot\vec{X})+(\vec{a}\cdot\vec{Y}) & (2')\end{cases}$$

则有 $$\vec{X}=-\frac{(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{d})}{\vec{a}^2+\vec{b}^2}+c_1\vec{a}+c_2\vec{b} \tag{3}$$

再由 $\vec{b}\times(A)-\vec{a}\times(B)$得

$$\vec{Y}=\frac{(\vec{a}\times\vec{d})-(\vec{b}\times\vec{c})}{\vec{a}^2+\vec{b}^2}+c_2\vec{a}-c_1\vec{b} \tag{4}$$

下面推出 c_1和 c_2. 将式(3)和式(4)代入已知方程组(A)式得

$$[-\vec{a}(\vec{a}\vec{c})+\vec{a}^2\vec{c}-\vec{b}(\vec{a}\vec{d})+\vec{d}(\vec{a}\vec{b})+\vec{a}(\vec{b}\vec{d})-\vec{d}(\vec{a}\vec{b})$$

$$-\vec{b}(\vec{b}\vec{c})+\vec{b}^2\vec{c}]\frac{1}{\vec{a}^2+\vec{b}^2}+c_2(\vec{a}\times\vec{b})+c_2(\vec{b}\times\vec{a})$$

$$=\vec{c}+\frac{1}{\vec{a}^2+\vec{b}^2}[\vec{a}\{(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{c})\}-\vec{b}\{(\vec{a}\vec{d})$$

$$+(\vec{b}\cdot\vec{c})\}]=\vec{c}$$

由此可以看出,对于任意的 c_1及 c_2均成立. 类似地,对于(B)式也是这样,因此(1)和(2)也是方程组有解的充分条件,且解由式(3)和式(4)给出,其中 c_1,c_2是任意常数.

评注 从此题解法中可以看出,对于解向量方程组和解代数方程组是一样的,都是通过运算将未知量用已知量表示

出来.所不同的是,解代数方程组只须将一个式子乘以一个数量,然后与第二式子进行运算即可.而在解矢量方程时,有时需要式子乘数量,有时则需要点乘、叉乘上一个矢量,然后进行运算.而在运算过程中又常常利用混合积的性质,完成矢性积到数性积的转化.

例7 证明:$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\vec{c})\vec{a}$

证明 设三矢量在标架$\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$下的分量分别为$\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\},\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\},\vec{c}=\{X_3,Y_3,Z_3\}$,并设$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\{X,Y,Z\}$,则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left\{\begin{vmatrix}Y_1Z_1\\Y_2Z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}Z_1X_1\\Z_2X_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}X_1Y_1\\X_2Y_2\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\{Y_1Z_2-Y_2Z_1,Z_1X_2-X_1Z_2,X_1Y_2-Y_1X_2\}$$

$$X=\begin{vmatrix}Z_1X_2-Z_2X_1 & Z_1Y_2-X_2Y_1\\Y_3 & Z_3\end{vmatrix}$$

$$=(Z_1X_2-Z_2X_1)Z_3-(X_1Y_2-X_2Y_1)Y_3$$

$$=(Y_1Y_3+Z_1X_3)X_2-(Y_2Y_3+Z_2Z_3)X_1$$

$$=(X_1X_3+Y_1Y_3+Z_1Z_3)X_2$$

$$-(X_2X_3+Y_2Y_3+Z_2Z_3)X_1$$

$$=(\vec{a}\vec{c})X_2-(\vec{b}\vec{c})X_1$$

同理可证:

$$Y=(\vec{a}\vec{c})Y_2-(\vec{b}\vec{c})Y_1$$

$$Z=(\vec{a}\vec{c})Z_2-(\vec{b}\vec{c})Z_1$$

所以 $\{X,Y,Z\}=(\vec{a}\vec{c})\{X_2,Y_2,Z_2\}-(\vec{b}\vec{c})\{X_1,Y_1,Z_1\}$

即 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\vec{c})\vec{a}$

评注1° 在证明矢量等式时,首先设出矢量的分量,通过计算两端相同即可.

2° 在利用分量来证明时，关于标架的选择，并不是任意的. 一般说来，在证明只有线性运算的等式时，可采用仿射坐标也可采用直角坐标系，而在证明关于矢量乘积的等式时，一般采用直角坐标系.

习　题　5.7

1. 判断下列各矢量是否共面：

(1) $\vec{a}=\{3,4,5\},\vec{b}=\{1,2,2\},\vec{c}=\{9,14,16\}$

(2) $\vec{a}=\{1,1,1\},\vec{b}=\{1,2,-3\},\vec{c}=\{0,-1,2\}$

(3) $\vec{a}=\{0,1,-2\},\vec{b}=\{0,2,-4\},\vec{c}=\{0,-3,6\}$

2. 判断下列四点是否共面，不共面的求出以它们为顶点的四面体的体积及 A 到对面的距离.

(1) $A(1,1,0)$　$B(0,1,1)$　$C(-1,0,1)$　$D(0,0,-1)$

(2) $A(1,0,1)$　$B(4,4,6)$　$C(2,2,3)$　$D(10,14,17)$

(3) $A(0,0,0)$　$B(3,4,5)$　$C(1,2,2)$　$D(9,14,16)$

3. 试建立平面的方程.

4. 试把下列各组矢量中 $\vec{d}$ 表示为 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的线性组合：

(1) $\vec{a}=\{3,2,1\},\vec{b}=\{7,5,0\},\vec{c}=\{-2,3,4\},\vec{d}=\{12,4,3\}$

(2) $\vec{a}=\{5,0,-2\},\vec{b}=\{0,4,-3\},\vec{c}=\{-6,1,0\},\vec{d}=\{25,16,-22\}$

(3) $\vec{a}=\{5,6,3\},\vec{b}=\{-7,1,2\},\vec{c}\{0,6,12\},\vec{d}=\{20,18,0\}$

5. 证明：三直角棱锥的斜面面积的平方等于其他三个面的面积的平方和.

6. 证明：$|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|\leqslant|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$

7. 证明：若 $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$，则 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面.

8. 证明：(1) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\vec{b}\vec{d})\vec{c}-(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{d}$

(2) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\vec{c}\vec{d})\vec{b}-(\vec{b}\vec{c}\vec{d})\vec{a}$

9. 证明：对任意四个矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$，有 $(\vec{b}\vec{c}\vec{d})\vec{a}+(\vec{c}\vec{a}\vec{d})\vec{b}+(\vec{a}\vec{b}\vec{d})\vec{c}+(\vec{b}\vec{a}\vec{c})\vec{d}=\vec{0}$

第6章　平　　面

平面是空间几何中最简单最基本的图形. 它在空间解析几何中的地位相当于直线在平面解析几何中的地位. 平面有各种形式的方程,根据平面方程可得到平面与平面、点与平面间位置关系的代数条件以及相应的度量性质,如距离、角度等.

§6.1　平面的参数方程和一般方程

一、基本内容

1. 平面的方位矢量

对于平面 π,如果矢量 $\overrightarrow{V}_1 // \pi$, $\overrightarrow{V}_2 // \pi$,且 $\overrightarrow{V}_1$、$\overrightarrow{V}_2$不平行,则 $\overrightarrow{V}_1$、$\overrightarrow{V}_2$叫作平面 π 的方位矢量.

所谓 $\overrightarrow{V}_1 // \pi$ 就是若把 $\overrightarrow{V}_1$的起点放在 π 上,则 $\overrightarrow{V}_1$在平面 π 上。由上面的定义可知,平面的方位矢量是由两个不共线的矢量构成的,而且一个平面的方位矢量不是唯一的一组. 例如, $s\overrightarrow{V}_1$、$t\overrightarrow{V}_2$也是 π 的一组方位矢量,其中 s、t 是数量,且 $s \cdot t \neq 0$.

2. 平面方程的几何形式

空间中任一平面 π 都可以用它上面的一个点 M_0和它的一组方位矢量 $\overrightarrow{V}_1$、$\overrightarrow{V}_2$来确定,即平面 π 是使得$\overrightarrow{M_0M}$、$\overrightarrow{V}_1$、$\overrightarrow{V}_2$共面的点 M 的集合.

如图6—1，取定标架$\{0;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$，设$\overrightarrow{OM_0}=\vec{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$，$\vec{V}_1=\{X_1,Y_1,Z_1\}$，$\vec{V}_2=\{X_2,Y_2,Z_2\}$，π上任意一点$M$径矢$\overrightarrow{OM}=\vec{r}=\{x,y,z\}$. 平面方程的三种常见形式的推导示意图，也是它们之间的关系图：

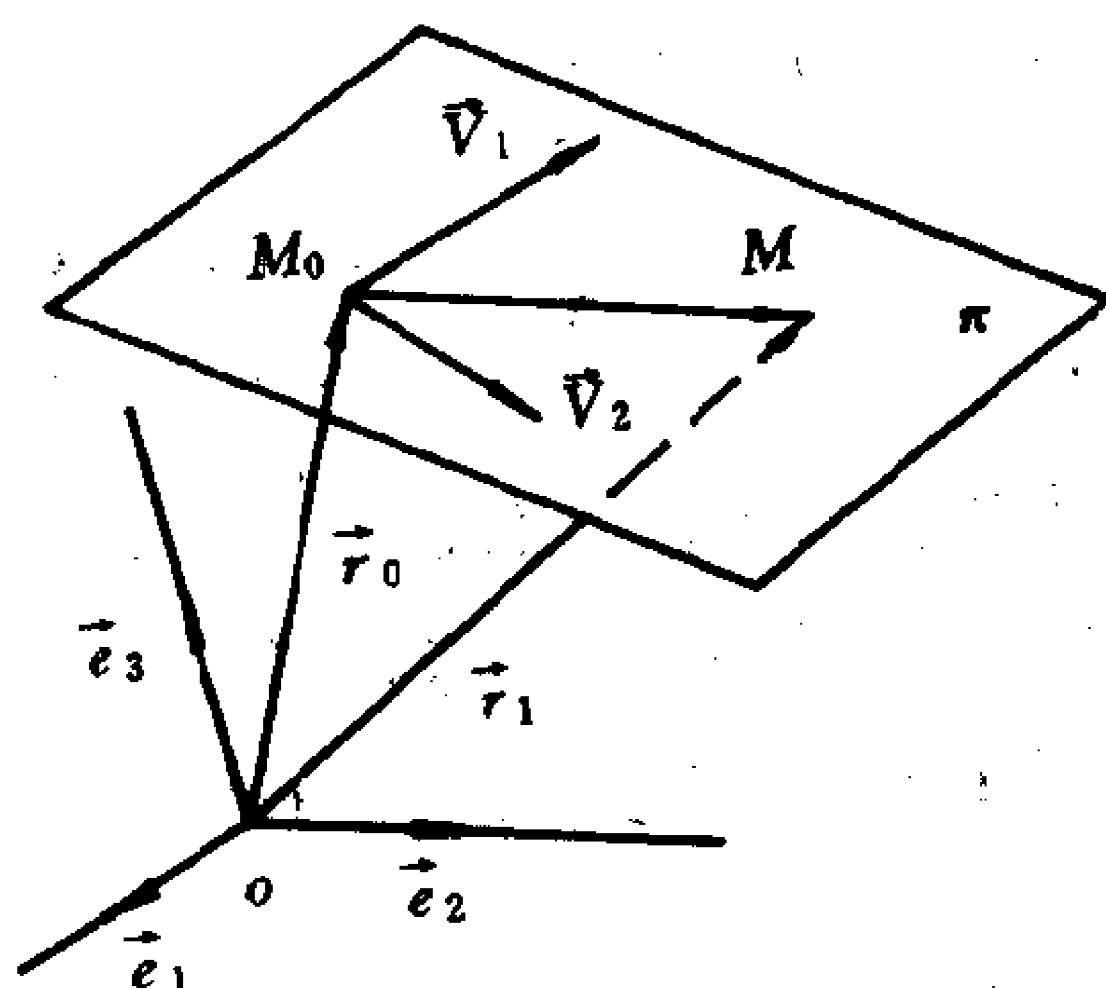


图 6—1

平面π：使得$\overrightarrow{M_0M}$、$\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$共面的点M的集合 ⇒三矢量共面的充要条件.

参数式

$\overrightarrow{M_0M}=s\vec{V}_1+t\vec{V}_2$，

即 $\vec{r}=\vec{r}_0+s\vec{V}_1+t\vec{V}_2$

亦即$\begin{cases}x=x_0+X_1s+X_2t\\ y=y_0+Y_1s+Y_2t\\ z=z_0+Z_1s+Z_2t\end{cases}$

其中s,t是参数

点位式

$(\overrightarrow{M_0M},\vec{V}_1,\vec{V}_2)=0$

即 $\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}=0$

消参数：不妨设$A\neq0$，引入参数$s=y$、$t=z$，则

$x=-\dfrac{D}{A}-\dfrac{B}{A}s-\dfrac{C}{A}t$

行列式展开：不妨设$A\neq0$

取点$M_0=(-\dfrac{D}{A},0,0)$

方位矢量$\vec{V}_1=\{B,-A,0\}$

$\vec{V}_2=\{C,0,-A\}$

$$A=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} \qquad C=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$$

$$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$$

一般式	$Ax+By+Cz+D=0$ A、B、C 不全为零。

评注1 确定平面还可以用另一些条件，但很多都可归结为一定点和方位矢量这种条件.

平面的三点式方程：平面 π 由不共线的三点 $M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$ 确定. 则 π 的方位矢量就可以取 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_1M_3}$，定点可取 M_1(或 M_2、M_3). 其方程是

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

利用行列式的性质又可改写为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

这就是平面的三点式方程.

平面的截距式方程：平面 π 与三坐标轴交点为 $M_1(a,0,0)$，$M_2(0,b,0)$，$M_3(0,0,c)$，其中 $abc\neq0$，可得 π 的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

这就是平面的截距式方程，其中 a,b,c 分别叫平面 π 在三坐标轴上的截距.

评注2 平面的各种形式的方程一般都可以用方程的同

解变形互化，根据具体问题的需要采用恰当形式的方程.

评注3 上述五种形式的平面方程都是在一般仿射坐标系下建立起来的.

3. 基本定理

定理6.1.1 空间中任一平面的方程都是一个关于变数 x、y、z 的一次方程；反过来，任意一个关于变数 x、y、z 的一次方程都表示一个平面.

三元一次方程的一般形式为 $Ax+By+Cz+D=0$，其中 A,B,C 不全为零，它就是平面的一般式方程. 该定理揭示了空间的平面与三元一次方程之间的对应关系.

定理6.1.2 设平面 π 的方程是 $Ax+By+Cz+D=0$，则矢量 $\overrightarrow{V}=\{X,Y,Z\}$ 平行于 π 的充分条件是

$$AX+BY+CZ=0$$

证明 设 π 的方位矢量为 $\overrightarrow{V_1}$，$\overrightarrow{V_2}$，则 $\overrightarrow{V}/\!/\pi\Leftrightarrow\overrightarrow{V}$，$\overrightarrow{V_1}$，$\overrightarrow{V_2}$ 共面 $\Leftrightarrow(\overrightarrow{V},\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2})=0$.

而 $\overrightarrow{V_1}$、$\overrightarrow{V_2}$ 可从 π 的方程中求得.

不妨设 $A\neq0$，则

$$x=-\frac{D}{A}-\frac{B}{A}y-\frac{C}{A}z$$

令 $y=s,z=t$，得 π 的参数方程

$$\begin{cases}x=-\dfrac{D}{A}-\dfrac{B}{A}s-\dfrac{C}{A}t\\ y=s\\ z=t\end{cases}\quad(s、t\text{ 是参数})$$

则可取 $\overrightarrow{V_1}=\{-\frac{B}{A},1,0\}$，$\overrightarrow{V_2}=\{-\frac{C}{A},0,1\}$（显然 $\overrightarrow{V_1}$ 不平行

$\overrightarrow{V_2}$），从而

$$(\overrightarrow{V},\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2})=\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ -\frac{B}{A} & 1 & 0 \\ -\frac{C}{A} & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

展开即得 $$AX+BY+CZ=0$$

该定理的证明不依赖坐标系的特殊性质，因此定理的结论在一般仿射坐标系下成立. 另外，证明中看到 π 的方程的一次项系数确定出了 π 的一组方位矢量，即是说一次项的系数决定了平面的方位.

利用定理6.1.1、6.1.2，容易得到下面的一些结果，这是平面对坐标系具有某种特殊位置的情况.

推论6.1.1 设平面 π 为 $Ax+By+Cz+D=0$

1° π 过原点，当且仅当 $D=0$；

2° π 过 x 轴（y 轴或 z 轴），当且仅当 $A=D=0$（$B=D=0$或 $C=D=0$）；$\pi // x$ 轴（y 轴或 z 轴），当且仅当 $A=0$且 $D\neq 0$（$B=0$且 $D\neq 0$，或 $C=0$且 $D\neq 0$）；

3° $\pi // xy$ 坐标面（xz 面或 yz 面），当且仅当 $A=B=0$ 且 $D\neq 0$（$A=C=0$且 $D\neq 0$，或 $B=C=0$且 $D\neq 0$）；xy 面，xz 面，yz 面的方程分别是：$z=0$，$y=0$，$x=0$.

证明是很容易的，这里证明其中的两条，其余的证明留给读者.

$\pi // x$ 轴 $\Leftrightarrow \pi // \overrightarrow{e_1}$（$\overrightarrow{e_1}=\{1,0,0\}$）且 π 不过原点 $\Leftrightarrow A\cdot 1+B\cdot 0+C\cdot 0=0$且 $D\neq 0$，即 $A=0$且 $D\neq 0$.

$\pi // xy$ 面 $\Leftrightarrow \pi // \overrightarrow{e_1}$ 且 $\pi // \overrightarrow{e_2}$（$\overrightarrow{e_2}=\{0,1,0\}$）. 且 π 不过原点 $\Leftrightarrow A=0$且 $B=0$且 $D\neq 0$.

二、常用方法及应用举例

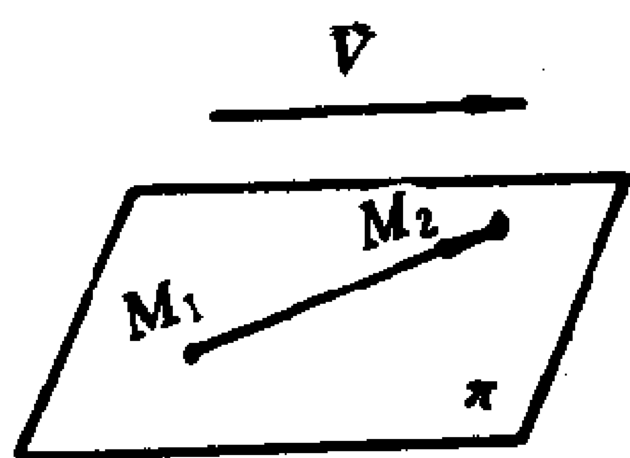


图 6—2

例1 求通过点 $M_1(3,-1,2)$，$M_2(2,0,2)$且平行于矢量 $\vec{V}=\{2,-1,-3\}$的平面 π 的参数方程和一般方程(见图6—2).

解法一 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1,1,0\}$. π 的方位矢量可取 $\vec{V}_1$和$\overrightarrow{M_1M_2}$，而 M_1为 π 上的点，则 π 的参数方程是

$$\begin{cases} x = 3 - s + 2t \\ y = -1 + s - t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad (s,t\text{ 是参数})$$

由于 π 的点位式方程是

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0$$

展开即得 π 的一般方程

$$3x+3y+z-8=0$$

解法二 根据定理6.1.1，设 π 的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

因 π 过 M_1，M_2，则有

$$3A - B + 2C + D = 0 \tag{1}$$

$$2A + 2C + D = 0 \tag{2}$$

又 $\vec{V}$ // π，由定理6.1.2，有

$$2A - B - 3C = 0 \tag{3}$$

从(1)、(2)、(3)的联立方程组可解得 $A:B:C:D$(不能解得四个未知数的确定的值,但只要它们的比就行了).

$$A:B:C:D=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}$$

$$:\begin{vmatrix}3 & -1 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & -1 & -3\end{vmatrix}=3:3:1:(-8)$$

故 π 的一般方程是

$$3x+3y+z-8=0$$

引进参数 $x=\mu, y=\nu$,即得 π 的参数方程

$$\begin{cases}x=\mu\\ y=\nu \qquad\qquad (\mu,\nu \text{ 是参数})\\ z=8-3\mu-3v\end{cases}$$

(它与解法一所得的参数方程是同解的)

例2 求过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 并且与平面 π: $Ax+By+Cz+D=0$ 平行的平面 σ 的方程.

解法一 由 π 的方程 $Ax+By+Cz+D=0$(不妨设 $B\neq 0$)可得 π 的方位矢量为 $\{B,-A,0\}$,$\{0,-C,B\}$,因 $\pi/\!/\sigma$,故 π 的方位矢量也是 σ 的方位矢量,于是 σ 的方程为

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ B & -A & 0\\ 0 & -C & B\end{vmatrix}=0$$

展开得 $AB(x-x_0)+B^2(y-y_0)+BC(z-z_0)=0$

即 $Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$

解法二 设 $P(x,y,z)$ 为 σ 上任一点,则 $P\in$ 平面 $\sigma\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{P_0P}/\!/\sigma \overset{\sigma/\!/\pi}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{P_0P}/\!/\pi \overset{\text{定理6.1.2}}{\Longleftrightarrow} A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-$

$z_0)=0$，即 σ 的方程是

$$Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$$

例3 已知平面过点 $A(4,-3,2)$ 且在各坐标轴上有相同的非零截距，求它的方程.

解 依题意，设所求平面在各坐标轴上的截距为 $a(a\neq 0)$，则其方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$$

又因为它过点 $A(4,-3,2)$ 则

$$\frac{4}{a}+\frac{-3}{a}+\frac{2}{a}=1 \quad 得\ a=3$$

于是求得平面方程为

$$x+y+z-3=0$$

小结 例1到例3都是由已知条件求平面方程，常用的一种方法是找出所求平面上的一个点的坐标及平面的方位矢量，然后写出平面的点位式方程或参数式方程；另一方法是根据定理6.1.1，设出所求平面的一般方程或其变式(为截距式)，再根据已知条件列出关于待定系数的方程，求出待定系数的比或其值，从而得平面方程. 当然也可直接根据平面上的点所满足的轨迹条件求得方程(如例2的解法二).

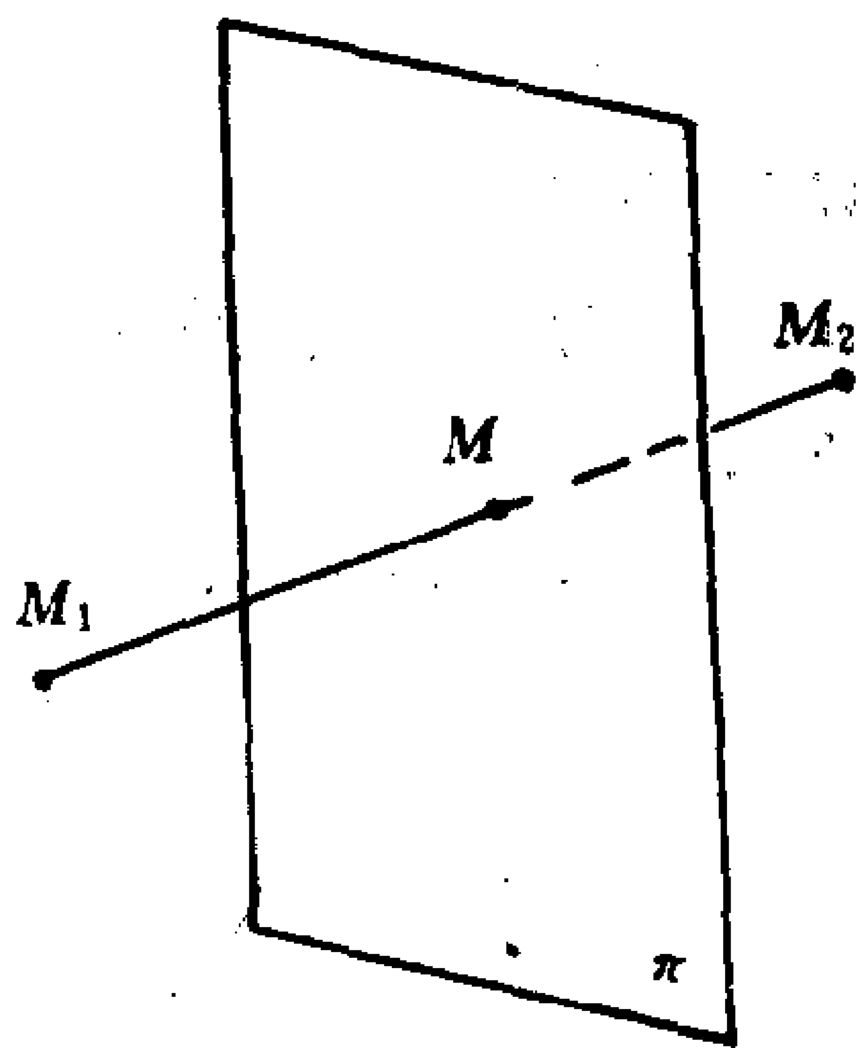


图 6—3

例4 设平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$ 与连接两点 $M_1(x_1,$

y_1, z_1)和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$的直线相交于点 M，且$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$，如图6—3，证明

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}$$

证明 设 M 点的坐标为(x,y,z)，因$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$，故

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \\ z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \end{cases}$$

$M\in\pi$，因此有

$$A\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+B\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+C\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}+D=0$$

即 $\lambda(Ax_2+By_2+Cz_2+D)=-(Ax_1+By_1+Cz_1+D)$

$M_2\notin\pi$（否则 $Ax_2+By_2+Cz_2+D=0$，由上一等式 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$，即 $M_1\in\pi$，这样直线 $M_1M_2\in\pi$，与题设矛盾），故 $Ax_2+By_2+Cz_2+D\neq0$，于是得

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}$$

例5 已知$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$为不共面的三个矢量，设OE是以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$为棱的平行六面体的对角线，OE 与平面 ABC 交于点 M，求证$|OE|=3|OM|$.

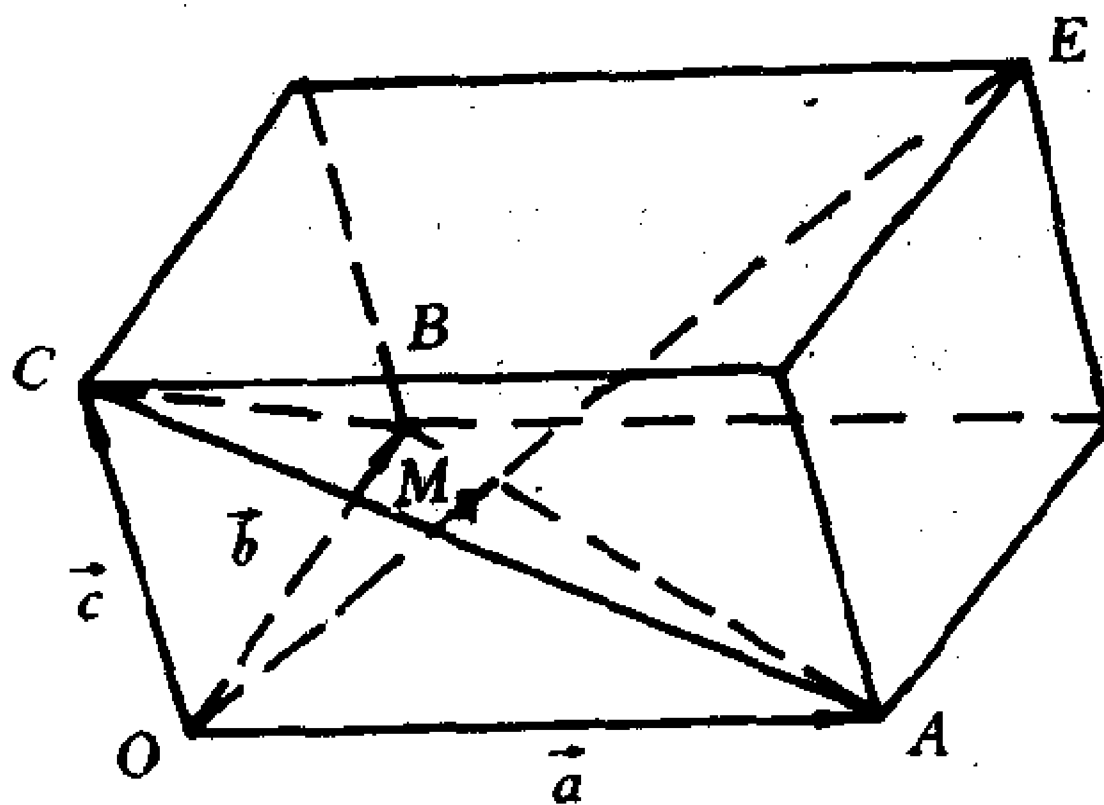


图 6-4

证法一 如图6—4，记$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，则平面 ABC 的方位矢量

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$
$$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$$

平面 ABC 的矢量式参数方程是

$$\vec{r}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a})+\mu(\vec{c}-\vec{a})\lambda,\mu \text{ 是参数.}$$

$\overrightarrow{OM}\parallel\overrightarrow{OE}$，故存在数 k，使得

$$\overrightarrow{OM}=k\,\overrightarrow{OE}=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

又因 M 在平面 ABC 上，那么$\overrightarrow{OM}$满足平面 ABC 的矢量式参数方程，即存在数 λ_1,μ_1，使得

$$k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\lambda_1(\vec{b}-\vec{a})+\mu_1(\vec{c}-\vec{a})$$

即$(k-1+\lambda_1+\mu_1)\vec{a}+(k-\lambda_1)\vec{b}+(k-\mu_1)c=0$

因 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 线性无关，则有

$$\begin{cases}k-1+\lambda_1+\mu_1=0\\k-\lambda_1=0\\k-\mu=0\end{cases}$$

由此解得 $k=\frac{1}{3}$

$$\therefore \qquad \overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OE}\text{，即}3|OM|=|OE|$$

证法二 建立标架$\{O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$，则得各点的坐标：$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$，$E(1,1,1)$. 则平面 ABC 的方程是

$$x+y+z-1=0$$

又因$\overrightarrow{OM} \parallel \overrightarrow{OE}$，故存在数 k，使得$\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OE}$，于是 M 的坐标是(k,k,k)，而 $M\in$平面 ABC，则

$$k+k+k-1=0$$

$$k=\frac{1}{3}$$

所以 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OE}$，即$3|OM|=|OE|$

小结 例5是用解析法解立体几何问题的一个典型的例子. 从证法二中还看到，根据具体问题建立恰当的坐标系会给解题带来方便.

例4、例5都是用了这样一个基本点：如果已知平面 π 的方程，那么 π 上的点一定满足方程，不在 π 上的点一定不满足方程.

习 题 6.1

1. 求下列各平面的参数方程和一般方程：

(1)通过点 $A(2,0,0)$，且平行于矢量 $\overrightarrow{V}=\{3,-1,0\}$ 与 oz 轴；

(2)通过点 $A(1,4,-3)$和 oy 轴；

(3)已知四点 $A(5,1,3)$，$B(1,6,2)$，$C(5,0,4)$，$D(4,0,6)$. 求通过直线 AB 且平行于 CD 的平面；

(4)通过点 $M_0(2,-1,3)$且平行于平面$2x-y+3z-1=0$；

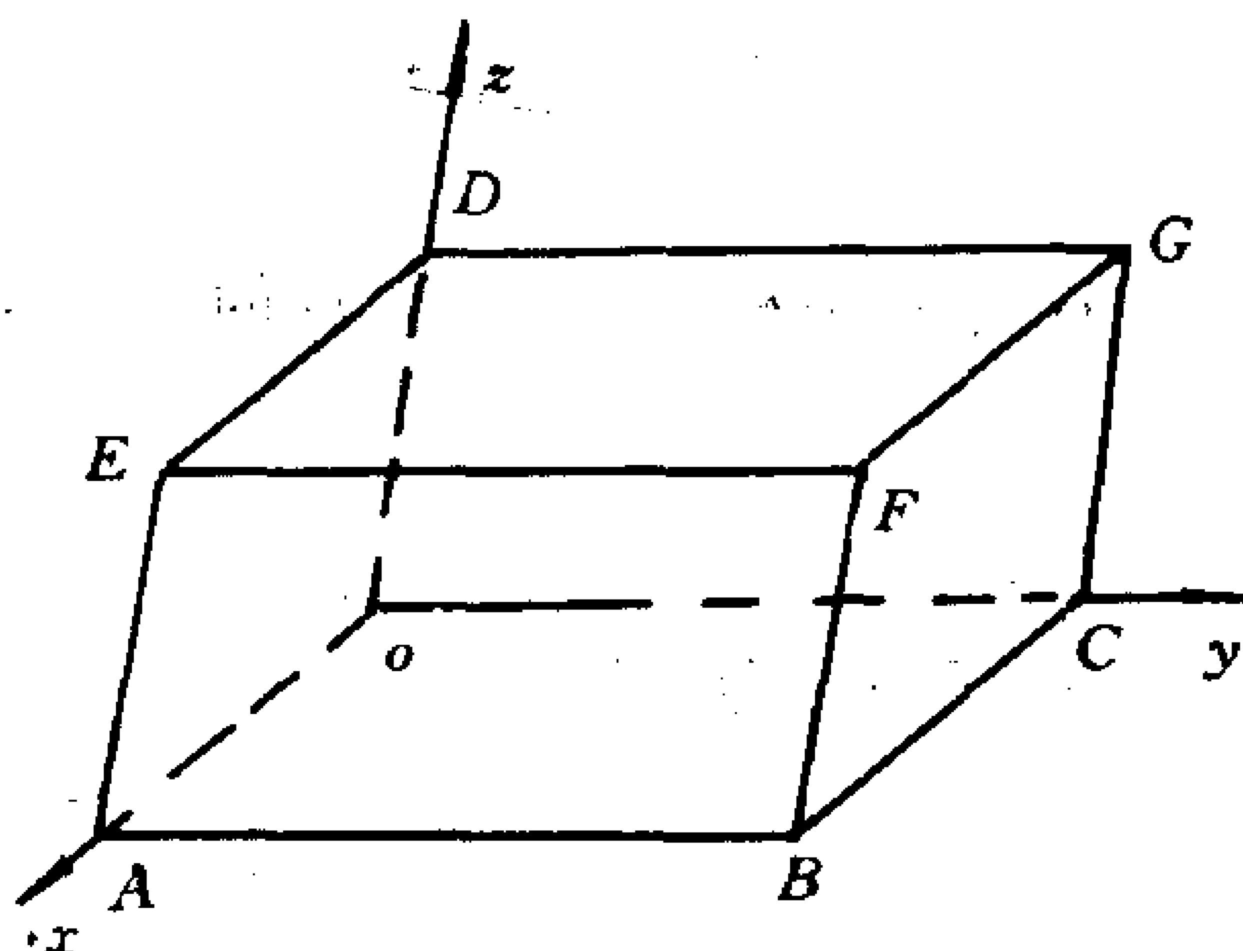
(5)在 ox 轴 oy 轴上的截距分别是3、-2且平行于矢量 $\overrightarrow{V}=\{2,1,-1\}$.

2. 求坐标面 xy 面与 xz 面所成二面角的平分面方程.

3. 如图的平行六面体中，已知 $A(4,0,0)$，$C(0,5,0)$，$D(0,0,3)$，求下列平面的方程：

(1)平面 $oDFB$；

(2)平面 $ADGB$；



第3题图

(3)平面 $BCGF$;

(4)平面 ACD;

(5)平面 CDF.

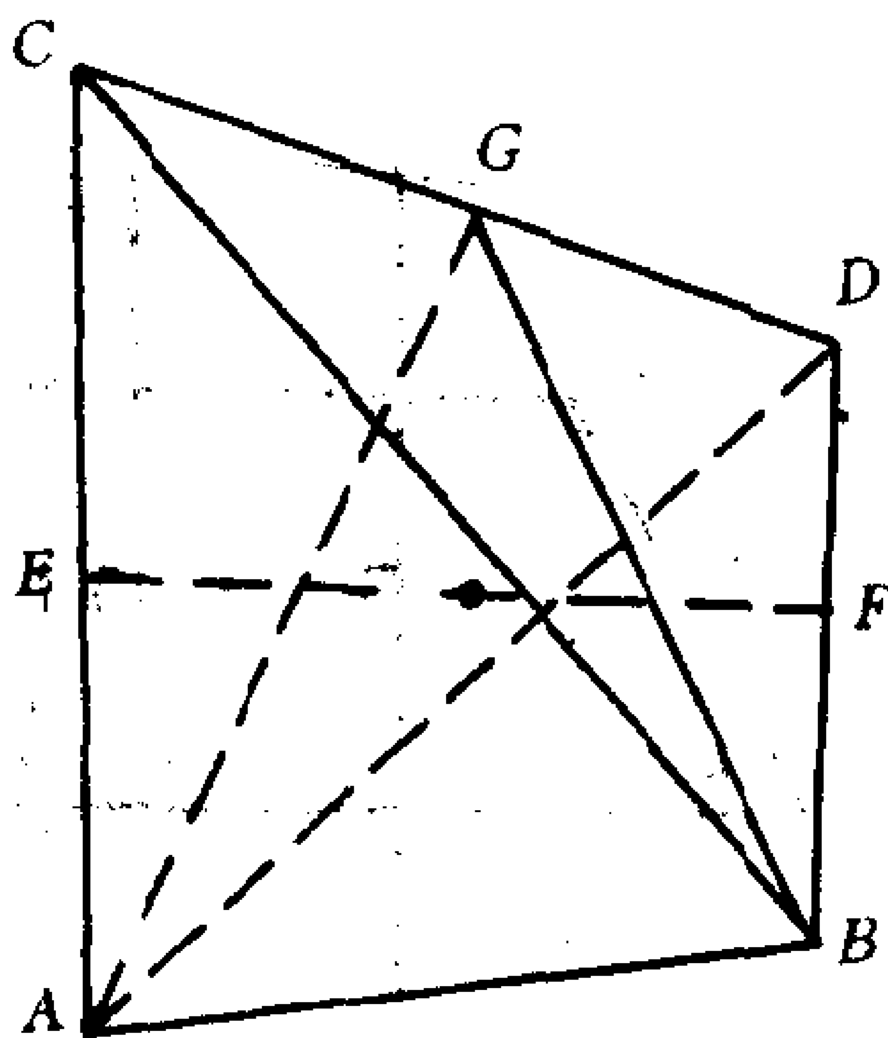
4. 在直角坐标系下，已知四面体的体积等于5，其中三个顶点是 $A(3,2,1)$，$B(-2,0,-3)$，$C(0,0,-2)$，求第四个顶点 D 的轨迹.

5. 已知直角三角形 $ABC(\angle C=90°)$，求点 P 的集合，它使 $|AP|^2+|BP|^2=2|CP|^2$.

6. 在直角坐标系下，已知平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$，求 π 关于 xy 平面的对称面 π' 的方程和关于坐标原点的对称面 π'' 的方程.

7. 已知一个四面体 $OABC$ 的三个平面与直角坐标系的坐标平面重合，且其边长 $AB=6$，$BC=\sqrt{29}$，$CA=5$，试求第四个面所在的平面方程.

8. 设 P、Q、R、S 分别为空间四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 上的点，当 P、Q、R、S 共面时，求证 $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$.



第12题图

9. 试求三个与坐标平面重合，而与原点相对的顶点在平面 $3x+y-2z-18=0$ 上的立方体的棱长.

10. 在直角坐标系下，设平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 与三条坐标轴的交点分别是 M_1，M_2，M_3，计算(1)$\triangle M_1M_2M_3$ 的面积；(2)四面体 $OM_1M_2M_3$ 的体积.

11. 求平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 与 x 轴正半轴相交的条件；与 y 轴负半轴相交的条件.

12. 如图 $ABCD$ 是四面体. E、F、G 分别是棱 AC、BD、CD 的中点，证明平面 ABG 平分线段 EF.

§6.2 平面的法式方程

一、基本内容

1. 平面的法矢量

如果非零矢量 $\vec{n}$ 垂直于平面 π，则 $\vec{n}$ 叫做平面 π 的一个法矢量，或简称平面 π 的法矢，如图6—5所示.

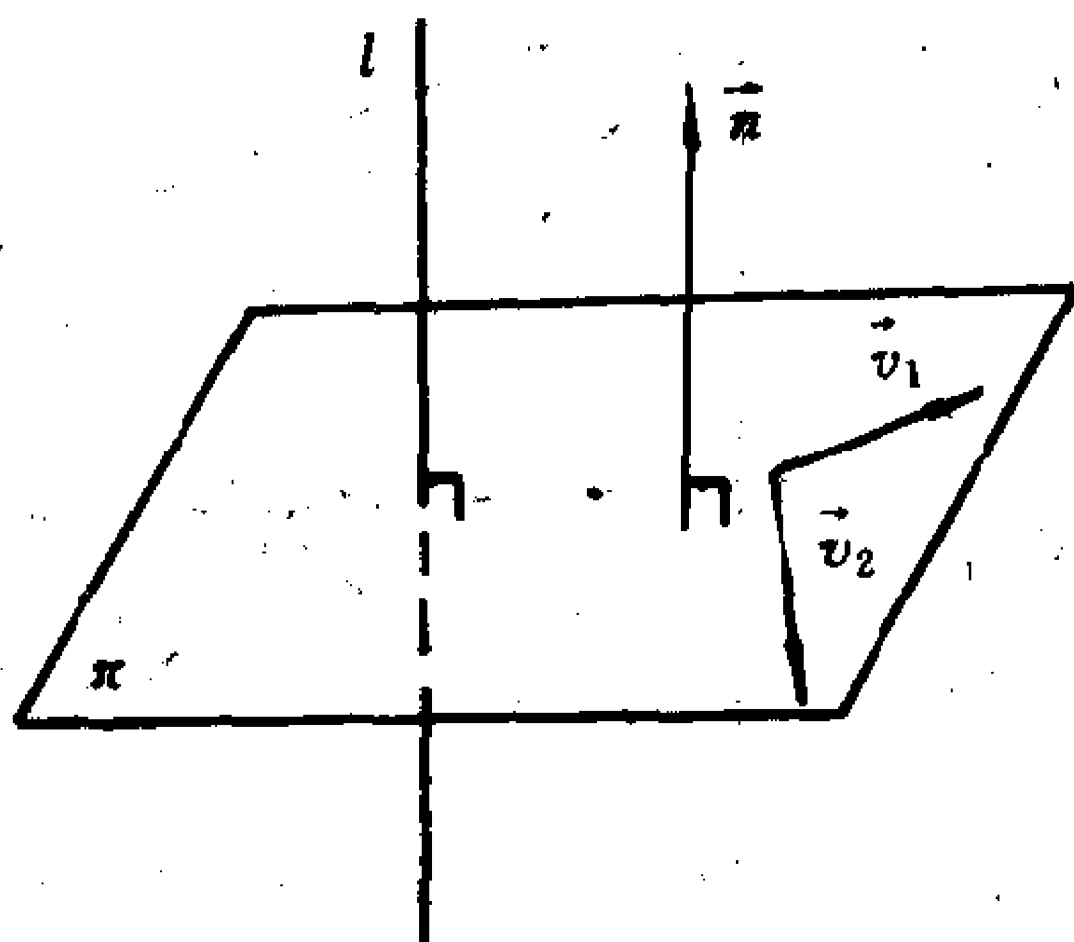


图 6—5

评注1 $\vec{n}\perp\pi$ 就是 $\vec{n}$ 垂直于任何与 π 平行的矢量，等价地就是 $\vec{n}$ 垂直 π 的一组方位矢量，或等价地就是与 $\vec{n}$ 平行的直线垂直于 π.

评注2 一个平面的法矢量也不是唯一的，它的方向可以有两种选择，它的长度更可以有多种选择. 即如果 $\vec{n}$ 是 π 的法矢量，则 $\lambda\vec{n}$（λ 是非零实数）也是 π 的法矢量. 因为零矢量垂直于任何矢量，所以定义中限制了 $\vec{n}\neq 0$.

2. 平面的点法式方程

如图6—6设在空间直角坐标系 $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ 下，$M_0(x_0,$

y_0,z_0)是平面 π 上一定点，$\overrightarrow{n}=\{A,B,C\}$是 π 的法矢量，$M(x,y,z)$是 π 上任意一点，则 M 在 π 上的充要条件是$\overrightarrow{M_0M}\perp\overrightarrow{n}$. 而两矢量垂直的充要条件是其数积为零，即

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$$

记$\overrightarrow{OM_0}=\overrightarrow{r}_0$，$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{r}$，那么$\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}_0$，上式即

$$\overrightarrow{n}\cdot(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}_0)=0 \qquad (6.2—1)$$

把这个数积写成分量形式就是

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (6.2—2)$$

这两个方程都叫做平面的点法式方程，(6.2—1)是矢量式的，(6.2—2)是坐标式的.

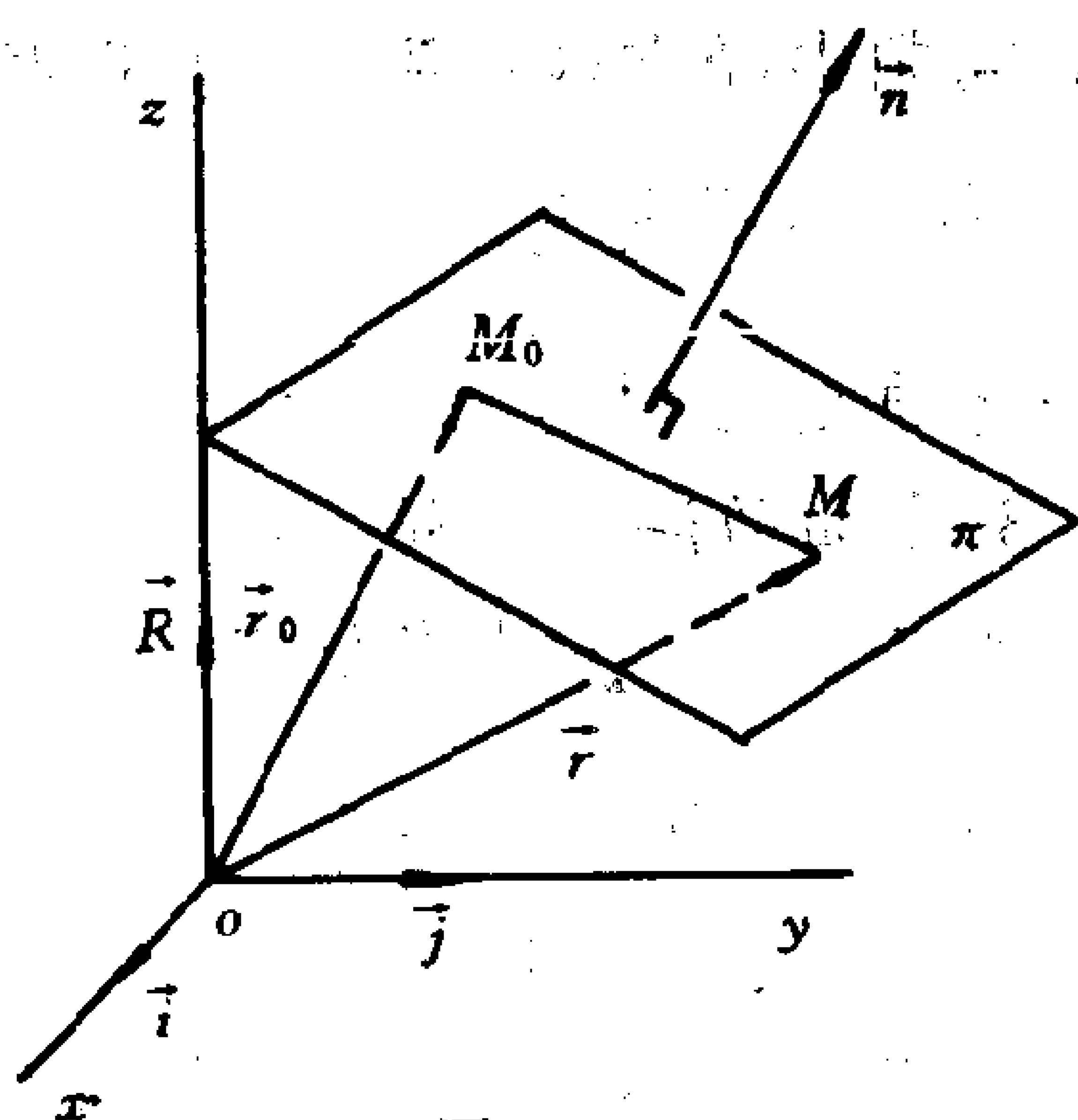


图 6—6

评注1 由§6.1知道平面 π 可由它上面的一个点 M_0和它的方位矢量$\overrightarrow{V}_1$，$\overrightarrow{V}_2$来确定. 但$\overrightarrow{V}_1$，$\overrightarrow{V}_2$可以确定一个非零矢量$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{V}_1\times\overrightarrow{V}_2$，$\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{V}_1$且$\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{V}_2$，所以$\overrightarrow{n}\perp\pi$，即$\overrightarrow{n}$是 π 的法矢量. 反过来知道了 π 的一个法矢量$\overrightarrow{n}=\{A,B,C\}$，也可确定 π 的一组方位矢量如$\{-B,A,$

0}和{−C,0,A}(不妨设 $A\neq 0$). 因此 π 的法矢量和方位矢量的作用是等价的,这样 π 上一定点 M_0 及 π 的法矢量 $\vec{n}$ 就完全确定了 π.

评注2 方程(6.2—2)用了直角坐标系下数积的分量表达公式,即对应分量乘积的和,因此平面的点法式方程要在直角坐标系下才具有(6.2.2)的形式.

评注3 方程(6.2.2)展开就是平面的一般式方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (6.2—3)$$

其中 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$,而 x,y,z 的系数恰好分别为 $\vec{n}$ 的三个分量 A,B,C.

即在直角坐标系下,平面 π 的一般方程(6.2.—3)中一次项的系数 A,B,C 是平面 π 的一个法矢量的分量.

一次项系数的这一简明的几何意义,在解答有关线面垂直的问题中经常被用到. 对于非直角坐标系则没有这种几何意义. 如 $\vec{e}_3$ 不垂直于 xoy 面的仿射坐标系 $\{0;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 中,xoy 面的方程是 $z=0$,但 $\{0,0,1\}=\vec{e}_3$ 不垂直于 xoy 面.

3. 平面的法式方程

如果平面 π 的法矢量取一个满足下列两条件的特殊法矢量 $\vec{n}^\circ$(称为 π 的单位法矢量):

(1) $\vec{n}^\circ$ 为单位矢量.

(2) $\vec{n}^\circ$ 的方向:当 $\vec{n}^\circ\cdot\vec{r}_0\neq 0$ 时,要使 $\vec{n}^\circ\vec{r}_0>0$;当 $\vec{n}^\circ\vec{r}_0=0$ 时(即 π 过原点时),$\vec{n}^\circ$ 的方向可任取.

设 $\vec{n}^\circ=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$($\alpha,\beta,\gamma$ 为 $\vec{n}^\circ$ 的方向角),并记 $\vec{n}^\circ\vec{r}_0=p$,则得 π 的法式方程

$$\vec{n}(\vec{r}-\vec{r}_0)=0 \text{ 或 } \vec{n}^\circ\vec{r}-p=0 \quad (6.2—4)$$

写成坐标的形式就是

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \quad (6.2—5)$$

(1)化一般方程为法式方程：

平面 π 的法式方程(6.2—5)仍是一般方程的形式，它具有如下两个特征：

①一次项系数是单位法矢量的分量，即它们的平方和等于1；

②常数项 $-p\leqslant 0$.

因此平面在直角坐标系下的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 都可以化为法方程，这只要在方程两边同乘因子

$$\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad (\text{取定符号后})$$

其中 λ 的正负的选取要使 $\lambda D\leqslant 0$，即当 $D\neq 0$ 时，取 λ 的符号与 D 异号；当 $D=0$ 时，λ 的符号可任取. 于是就得法式方程：

$$\lambda Ax+\lambda By+\lambda Cz+\lambda D=0$$

这种变形称为一般方程的法式化，而因子 λ(取定符号后)称为法式化因子. 这种变形的原因是：由平面的法矢量 $\{A,B,C\}$，可得两个单位法矢量 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\{A,B,C\}$. 从两个中可选取一个作为法方程定义中的 $\vec{n}^\circ$(就

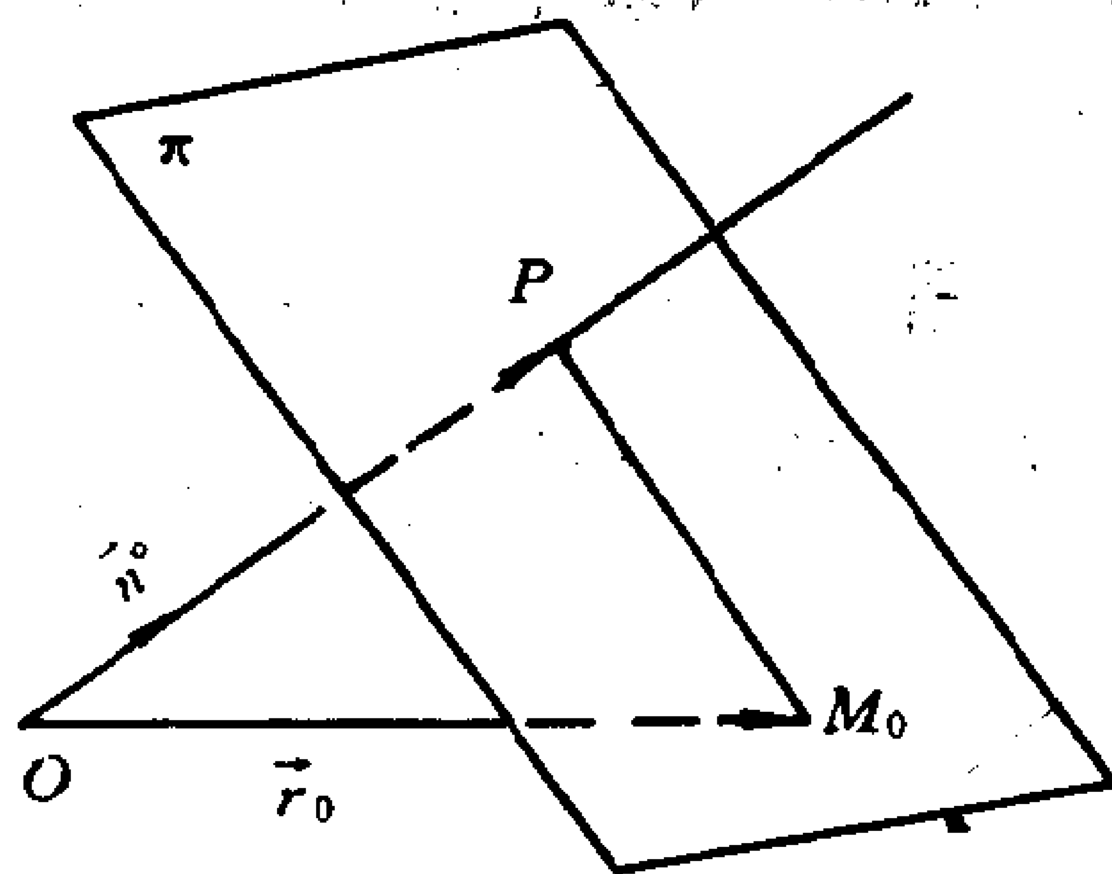


图 6—7

相当于选择 λ 的符号使 $\lambda D \leqslant 0$).

(2)法方程(6.2—6)中 p 的几何意义:

如图6—7p 的值等于原点到平面 π 的距离. 这是因为 $p = |\vec{n}°|\vec{r}_0 = \vec{n}°|\vec{r}_0|\cos\theta = OM_0\cos\theta$,其中 $\theta = \angle(\vec{n}°, \vec{r}_0)$,由 $\vec{n}°$的选择显然$0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

另方面,由原点 O 向 π 引垂线交 π 于 P,则 O 到 π 的距离就是$|OP|$,而 $\vec{n}° /\!/ OP$,故$\angle M_0OP = \theta$,于是$|OP| = OP = |OM_0|\cos\theta = p$. 特别地,当 π 过原点时$|OP| = 0 = |\vec{n}°||\vec{r}^{\cdot}|\cos\frac{\pi}{2} = p$.

由此还看到 $\vec{n}°$的方向当 π 不过原点时就是由原点 O 指向平面 π 的方向.

二、常用方法举例

本节的例题及习题非特别说明,坐标系均为直角坐标系.

例1 平面 π 通过三个点 $M_1(3,-1,5)$,$M_2(4,-1,1)$和$M_3(2,0,2)$,求平面 π 的一个法矢量,并写出 π 的点法式方程.

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{1,0,-4\}$,$\overrightarrow{M_1M_3} = \{-1,1,-3\}$,$\overrightarrow{M_1M_2} /\!/ \pi$,$\overrightarrow{M_1M_3} /\!/ \pi$ 且$\overrightarrow{M_1M_2}$不平行于$\overrightarrow{M_1M_3}$,所以 π 的一个法矢量就是

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \{4,7,1\}$$

π 的点法式方程是(取 M_3为定点)

$$4(x-2)+7(y-0)+(z-2)=0$$

例2 平面 π过点 $M_0(2,-3,1)$且和两平面 $\pi_1: x+3y-z$

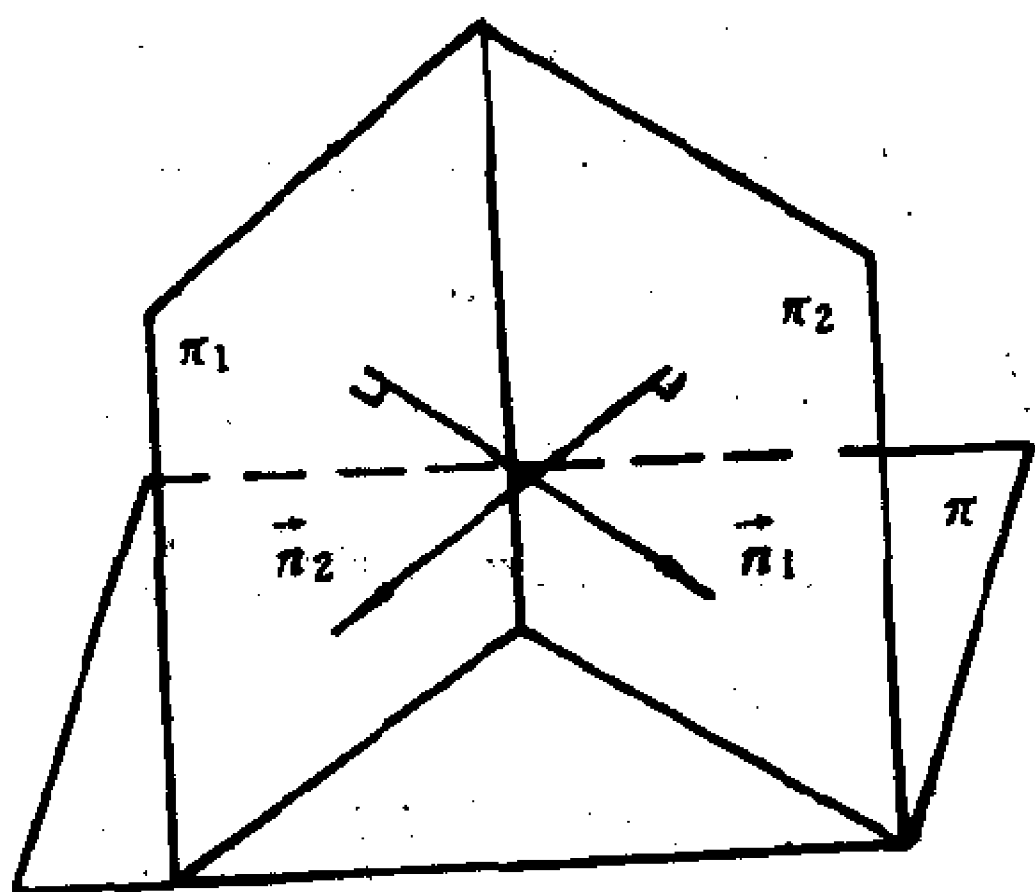


图 6—8

$+3=0$，π_2：$2x+y-2z+1=0$都垂直，求 π 的方程.

解 $\vec{n}_1=\{1,3,-1\}$，$\vec{n}_2=\{2,1,-2\}$，分别是 π_1、π_2 的法矢量. 如图6—8，因为 $\pi_1\perp\pi$ 且 $\pi_2\perp\pi$，则 $\vec{n}_1\parallel\pi$，且 $\vec{n}_2\parallel\pi$，又因为 $\vec{n}_1$ 不平行于 $\vec{n}_2$，故 $\vec{n}_1$，$\vec{n}_2$ 是 π 的一组方位矢量，可写出 π 的点位式方程. 于是可得 π 的法矢量

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-5,0,5\}$$

这样 π 的方程就是

$$-5(x-2)+5(z-1)=0$$

即 $\qquad x+z-3=0$

评注 若 $\pi\parallel\pi_2$，则 $\vec{n}_1\parallel\vec{n}_2$，$\vec{n}_1$、$\vec{n}_2$ 不构成 π 的一组方位矢量，此时问题的解不确定，有无穷多个解.

例3 设$\triangle ABC$ 各顶点的坐标为 $A(1,2,3)$，$B(3,4,1)$，$C(-1,0,1)$求$\triangle ABC$ 外接圆心 M.

解 如图6—9，设 M 的坐标为(x,y,z). M 点在线段 AB 的垂直平分面 π_1上，又在线段 AC 的垂直平分面 π_2上，又在平面 ABC 上. π_1过 AB 的中点$(2,3,2)$，且法矢量为$\overrightarrow{AB}=\{2,2,-2\}$. 则 π_1的方程是

$2(x-2)+2(y-3)-2(z-2)=0$

即 $\quad x+y-z-3=0 \qquad (1)$

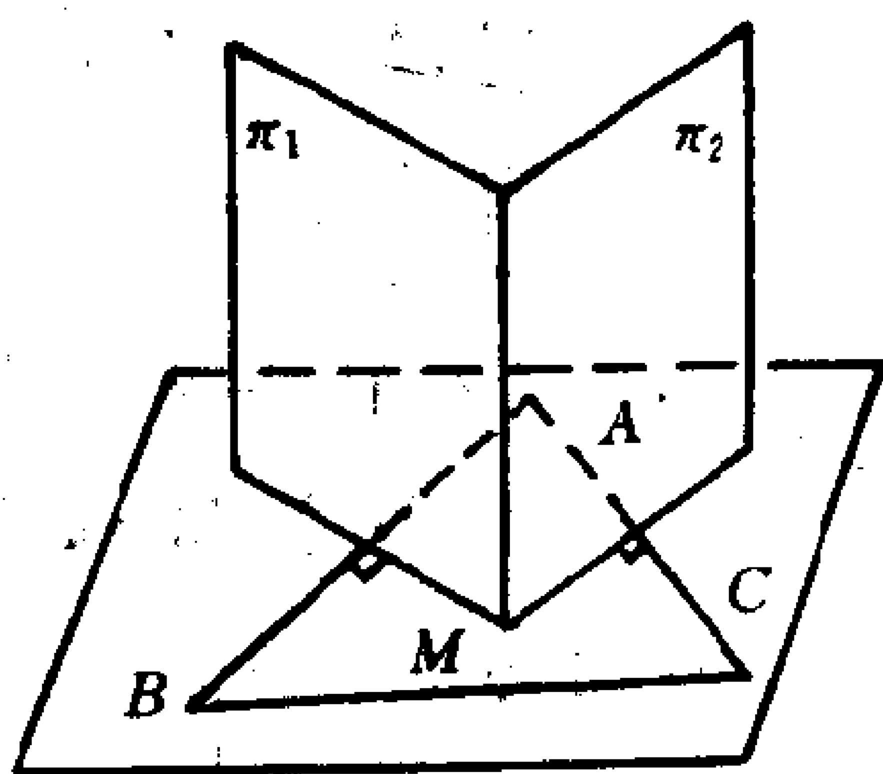


图 6—9

同理 π_2 的方程是

$$x+y+z-3=0 \quad (2)$$

而平面 ABC 的方程是

$$x-y+1=0 \quad (3)$$

于是 M 满足(1),(2),(3)联立方程组,解该方程组得

$$x=1, y=2, z=0$$

即 M 的坐标为(1,2,0).

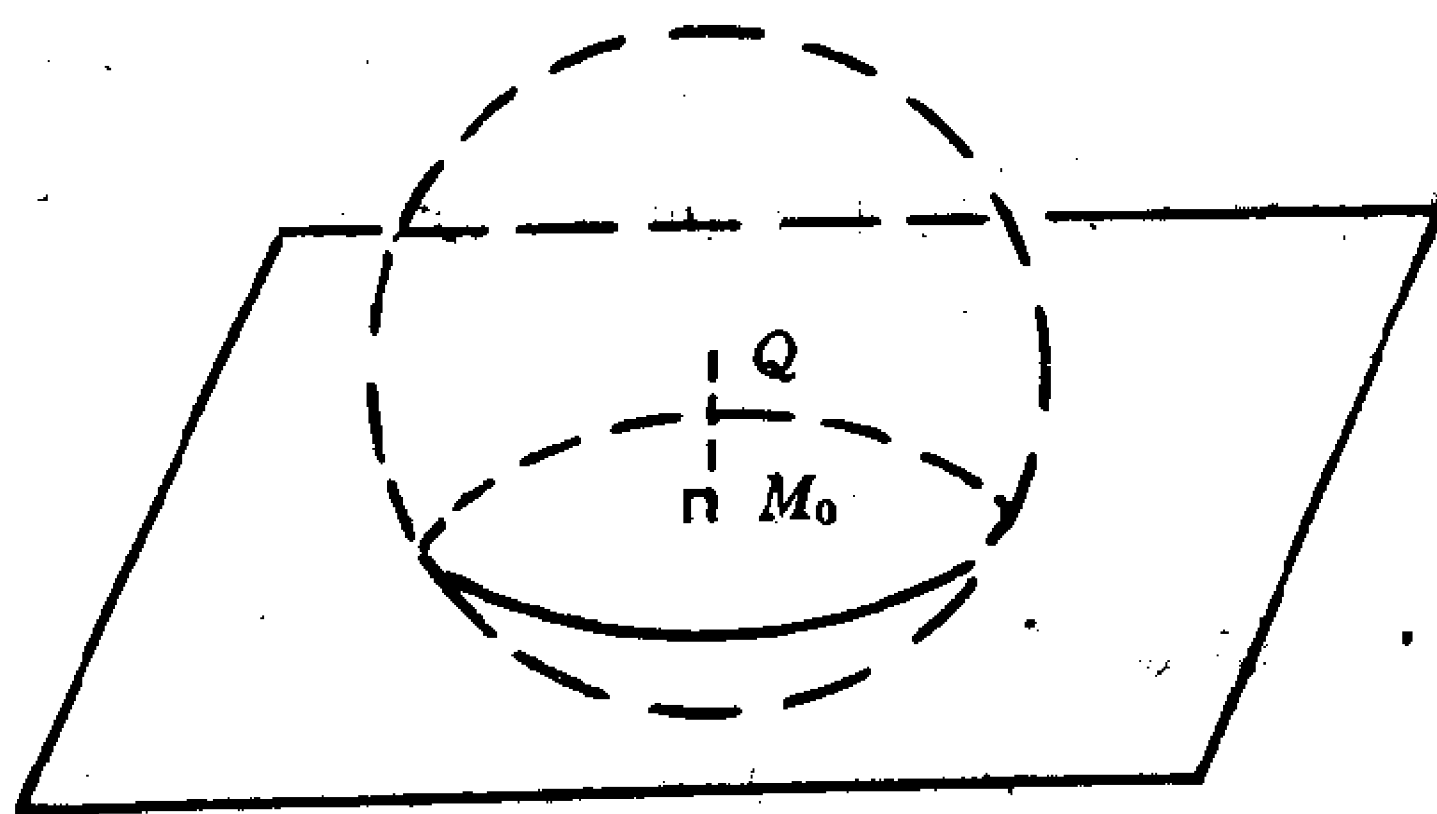


图6—10

例4 如图6—10,一个球的球心为 $M(a,b,c)$,半径为 R,则球面方程是 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. 设平面 $\pi: x+y+2z-1=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 交成一个圆,求这个圆的圆心.

解 设该圆的圆心为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,球心 Q 的坐标由球面方程可得(0,0,0). 因直线 QM_0 垂直于 π,即 $\overrightarrow{QM_0}=\{x_0,y_0,z_0\}$,而 π 的法矢量 $\overrightarrow{n}=\{1,1,2\}$,所以 $\overrightarrow{QM_0}/\!/\overrightarrow{n}$,于是有 $\frac{x_0}{1}=\frac{y_0}{1}=\frac{z_0}{2}$

又 M_0 在 π 上,则 $x_0+y_0+2z_0-1=0$

解联立方程组（三个方程三个未知数），得

$$x_0=1/6, y_0=1/6, z_0=1/3$$

即圆心是 $M_0(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{3})$.

例5 求点 $A(a,b,c)$ 关于平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的对称点 A'.

解 如图6—11，设 A' 为 (x_0,y_0,z_0)，则 $\overrightarrow{AA'}\perp\pi$，且线段 AA' 的中点 $(\frac{a+x_0}{2},\frac{b+y_0}{2},\frac{c+z_0}{2})$ 在 π 上. 而 π 的法矢量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$，故 $\overrightarrow{AA'}\parallel\vec{n}$，于是有

$$\frac{x_0-a}{A}=\frac{y_0-b}{B}=\frac{z_0-c}{C} \tag{1}$$

$$A\cdot\frac{x_0+a}{2}+B\cdot\frac{y_0+b}{2}+C\cdot\frac{z_0+c}{2}+D=0 \tag{2}$$

由(1)、(2)解得

$$x_0=a+At, y_0=b+Bt, z_0=c+Ct$$

其中 $t=-\dfrac{2(Aa+Bb+Cc+D)}{A^2+B^2+C^2}$

小结 在例1、2、3中看到求出平面的法矢量，写出平面的方程是很便当的. 例2、3、4中利用了直角坐标系下平面的一般方程中一次项系数的几何意义，而且这还是这三个例题的解题关键.

例6 平面 π 在 x、y、z 轴上的截距分别是 -1、$\frac{3}{2}$、3，求原点到平面 π 的距离，并求自原点指向平面 π 的单位法矢量的方向余弦.

分析 直接根据截距去计算原点到 π 的距离和由原点指向 π 的单位法矢量是很困难的，自然要想到 π 的法式方程的

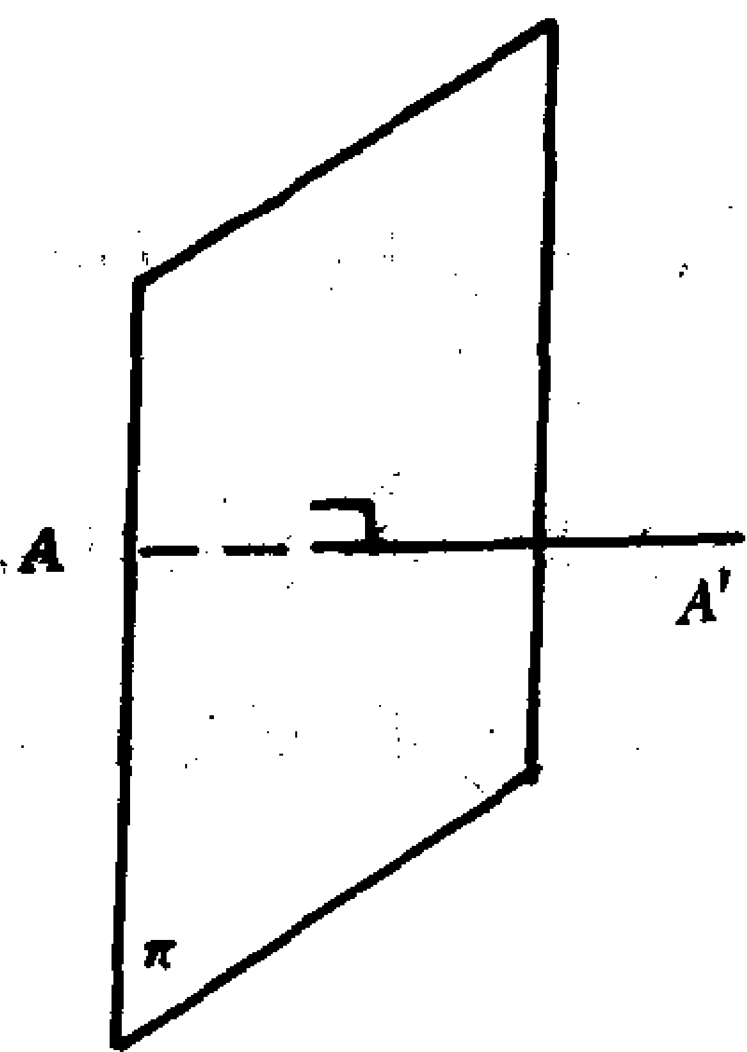


图 6—11

一次项系数和常数项的几何意义正是本题所求的东西，因此可解答如下：

解 平面 π 的方程由截距式得

$$-x+\frac{y}{\frac{3}{2}}+\frac{z}{3}=1$$

即 $\quad 3x-2y-z+3=0$

其法式方程是将一般方程两边乘以 $-1/\sqrt{14}$，得

$$-\frac{3}{\sqrt{14}}x+\frac{2}{\sqrt{14}}y+\frac{1}{\sqrt{14}}z-\frac{3}{\sqrt{14}}=0$$

所以原点到平面 π 的距离为 $p=\frac{3}{\sqrt{14}}$. 自原点指向 π 的单位法矢量是 $\{-\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\}$，其方向余弦就分别是 $-\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}$.

例7 已知两平行平面 $\pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$ $\quad\pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$，$D_1^2+D_2^2\neq 0$，求它们之间的距离.

分析 这一问题可归结为原点到 π_1,π_2 的距离 d_1,d_2 的问题去解，若 π_1,π_2 在原点同侧，则 π_1,π_2 的距离 $d=|d_1-d_2|$；若 π_1,π_2 在原点的两侧，则 $d=d_1+d_2$；若 π_1,π_2 有一个过原点，则 $d=d_1$ 或 d_2，于是可解答如下：

解 把 π_1 的方程化为法式，设法化因子为 λ，即

$$\lambda Ax+\lambda By+\lambda Cz+\lambda D_1=0 \tag{1}$$

则 $\quad -\lambda D_1\geqslant 0$，且原点到 π_1 的距离 $d_1=-\lambda D_1$.

考察 π_2 的方程（注意：不一定是法方程）

$$\lambda Ax+\lambda By+\lambda Cz+\lambda D_2=0 \qquad (2)$$

(1)若 $\lambda D_2\leqslant 0$，则(2)是 π_2 的法方程，且原点到 π_2 的距离 $d_2=-\lambda D_2$.

(i)当 $\lambda D_2<0$ 时，π_1、π_2 位于原点同侧(如图6—12a)，所以 π_1，π_2 之距 $d=|d_1-d_2|=|-\lambda D_1-(-\lambda D_2)|$，即 $d=|\lambda|\cdot|D_1-D_2|$

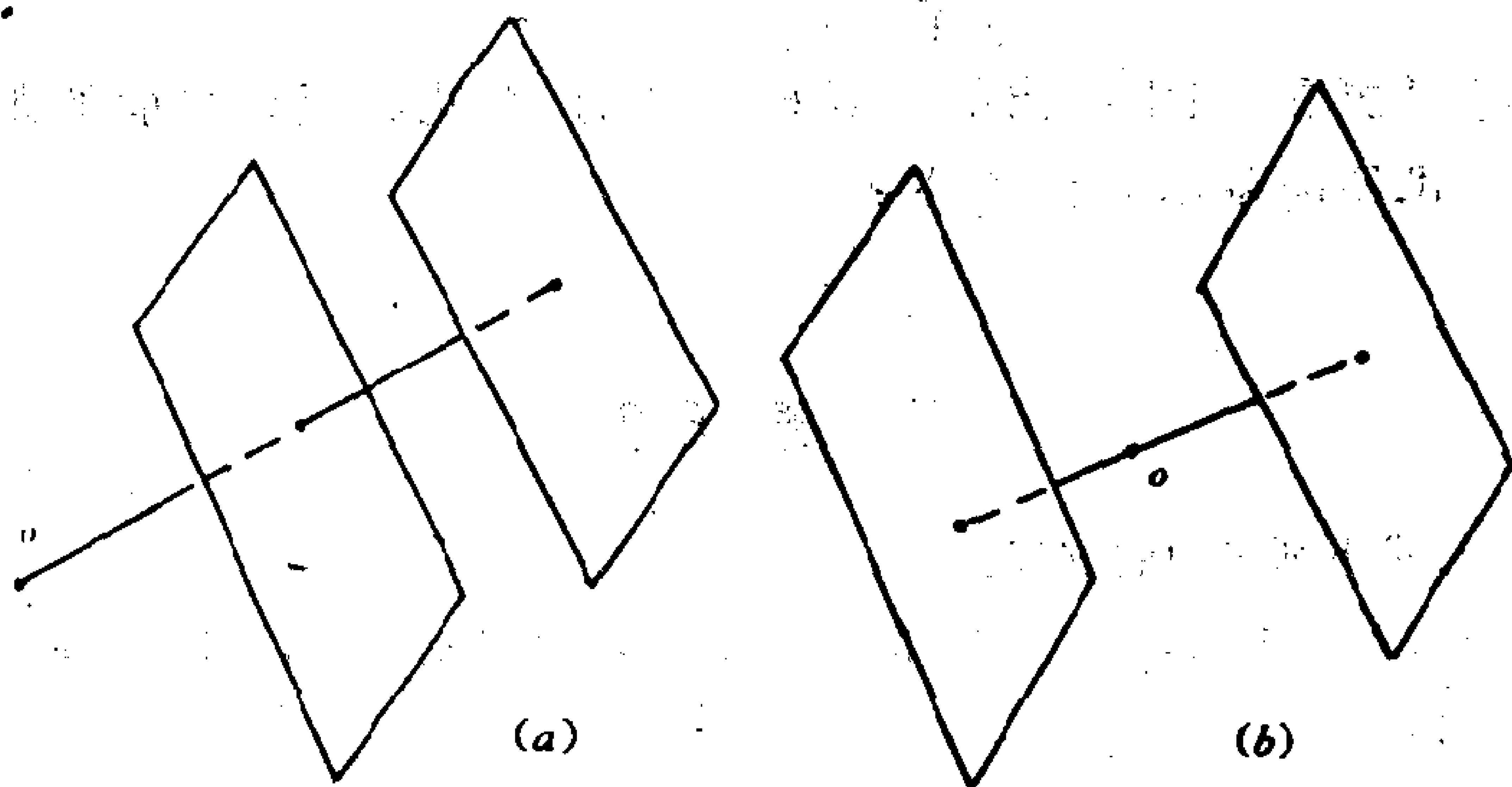


图 6—12

(ii)当 $\lambda D_2=0$ 时，π_2 过原点，则 $d=-\lambda D_1=|\lambda D_1-0|=|\lambda D_1-\lambda D_2|=|\lambda|\cdot|D_1-D_2|$

(2)若 $\lambda D_2>0$，π_2 的法式方程是

$$\lambda Ax-\lambda By-\lambda Cz-\lambda D_2=0$$

这时 π_1，π_2 位于原点两侧(单位法向量方向相反，如图6—12b)，且 $d_2=\lambda D_2$，这时

$$\lambda D_1+\lambda D_2=|-\lambda D_1+\lambda D_2|=|\lambda|\,|D_1-D_2|$$

综上可得，π_1，π_2 之间的距离 $d=|\lambda|\cdot|D_1-D_2|=\dfrac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

评注 由例7可以推得一般的点到平面的距离公式：已知点 $P(x_0,y_0,z_0)$和平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$. 则过 P 且与 π 平行的平面 π'的方程是 $Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0$；$\pi$ 与 π' 的距离就是 P 与 π 的距离，由例7得

$$d(P,\pi)=\frac{|D-(-Ax_0-By_0-Cz_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

这与后面§6.4中给出的公式是一样的，因此原点到平面的距离公式是最基本的距离公式.

习 题 6.2

1. 求下列平面的方程：

(1)由点 $M(4,-2,5)$向平面 π 引垂线，垂足是 $D(3,-1,2)$，求 π 的方程；

(2)已知四点 $A(5,1,3)$，$B(1,6,2)$，$C(5,0,4)$. 求通过直线 AB 且与△ABC 所在平面垂直的平面；

(3)求过 x 轴且与平面 $x-8y+3z-1=0$垂直的平面方程；

(4)平面 π 的法矢量为$\{1,2,3\}$，它与三个坐面围成的四面体的体积为8，求 π 的方程.

2. 平面 π 过点(x_0,y_0,z_0)且与平面

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$都垂直，求 π 的方程.

3. 已知球面方程为$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$，求它上面的点 $M_0(2,0,5)$处的切平面方程.

4. 设球面方程为$(x-5)^2+(y+5)^2+(z-5)^2=49$，它与平面$3x-6y-2z+14=0$相切，求切点的坐标.

5. 已知点 $A(1,3,-4)$与 $B(1,1,-1)$在平面 π：$3x+y-2z=0$的同

侧，在 π 上求一点 P，使得 $|PA|+|PB|$ 的值最小.

6. 判断下列平面方程中哪些是法式方程，不是法式方程的化为法式方程：

(1) $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-1=0$；

(2) $-\frac{6}{7}x+\frac{3}{7}y+\frac{2}{7}z+5=0$；

(3) $3x-4z+15=0$；

(4) $-\frac{5}{13}y+\frac{12}{13}z=0$；

(5) $x-1=0$；

(6) $2y-3=0$.

7. 求与原点距离为6个单位，且在三个坐标轴 ox，oy，oz 上的截距之比为 $a:b:c=-1:3:2$ 的平面.

8. 平面 π 的方程为 $Ax+By+D=0$，求 z 轴与 π 的距离.

9. 设从坐标原点到平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 的距离为 p，求证

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$$

10. 过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 作 OM_1 的垂直平面 π，设 π 与三坐标轴分别交于 A,B,C，求证 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\frac{d^2}{2|x_1y_1z_1|}$，其中 $d=|OM_1|$.

11. 试求下列各对平行平面之间距离，并指出原点是否在两平面之间：

(1) $2x-3y+6z-14=0$，$4x-6y+12z+21=0$；

(2) $6x-18y-9z-28=0$，$4x-12y-6z-7=0$；

(3) $15x-16y+12z-25=0$，$15x-16y+12z=0$.

12. 已知三角形三顶点为 $A(0,-7,0)$，$B(2,-1,1)$，$C(2,2,2)$，求平行于平面 ABC 且与它相距为2个单位的平面方程.

13. 已知两平行平面 $Ax+By+Cz+D_1=0$ 和 $Ax+By+Cz+D_2=0$，$D_1^2+D_2^2\neq0$，求与它们距离相等的点的轨迹.

14. 设平面的法矢量为 $\{A,B,C\}$，平面与点 (x_0,y_0,z_0) 的距离为 d，证明：该平面方程是

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)\pm d\sqrt{A^2+B^2+C^2}=0$$

§6.3 两平面的相关位置

一、基本内容

1. 两平面三种相关位置的代数条件

定理6.3.1 设两平面

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \qquad (6.3—1)$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \qquad (6.3—2)$$

(1)π_1、π_2相交的充要条件是它们方程中的一次项系数不对应成比例，即

$$A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2 \qquad (6.3—3)$$

(2)π_1、π_2平行的充要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2} \qquad (6.3—4)$$

(3)π_1、π_2重合的充要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2} \qquad (6.3—5)$$

分析 在中学几何中就已知道，两平面的相关位置有且仅有三种情况：相交(交于一条直线)，平行，重合. 这样只要证明定理的充分性成立，其必要性易由反证法证明. 而证充分性，要证π_1与π_2相交，只要证π_1与π_2有部分公共点，即有公共点但π_1的所有点不都是公共点. 要证π_1与π_2平行，只要证π_1、π_2无公共点. 要证π_1与π_2重合，只要证π_1的所有点都是π_2的点.

证明 充分性

(1)已知(6.3—3),该条件即是说$\frac{A_1}{A_2},\frac{B_1}{B_2},\frac{C_1}{C_2}$三个比中至少有两个不等,等价地就是下列三个行列式

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$$

中至少有一个不等于零.不妨设第一个行列式不为零,于是在π_1、π_2的方程中令 $z=0$(若第二个行列式不为零则令 $x=0$.若第三个列式不为零则令 $y=0$),得方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0 & (1) \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

其系数行列式不为零,它有唯一解,设为

$$x=x_0,y=y_0$$

则点$(x_0,y_0,0)$是π_1、π_2的公共点.但方程(1)有无穷多个解,它可取另一组解 $x=x_1,y=y_1$,于是点$(x_1,y_1,0)\in\pi_1$,但$(x_1,y_1,0)\in\pi_2$,所以π_1、π_2相交

(2)由已知,存在实数 $\lambda\neq0$,使得

$$A_1=\lambda A_2,B_1=\lambda B_2,C_1=\lambda C_2,D_1=\lambda D_2$$

($\lambda=0$则 $A_1=B_1=C_1=0$,与题设矛盾),于是π_1、π_2组成的方程组为

$$\begin{cases} \pi_1: A_2x+B_2y+C_2z+\dfrac{D_1}{\lambda}=0 \\ \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

因$\frac{D_1}{\lambda}\neq D_2$,故此方程组无解,即$\pi_1$、$\pi_2$无公共点,从而$\pi_1 /\!/ \pi_2$.

(3)由已知,存在实数 $\lambda\neq0$使得

$$A_1=\lambda A_2,B_1=\lambda B_2,C_1=\lambda C_2,D_1=\lambda D_2.$$

于是π_1的方程为

$$\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

即 $$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

π_1的方程与π_2完全一样，所以π_1、π_2重合.

必要性的证明用反证法并利用充分性的结论即可得证. 留给读者完成.

由证明可知，该定理在一般仿射坐标系下成立. 但在直角坐标系下，定理6.3.1有一个很好的几何说明：这时π_1、π_2的法矢量分别是

$$\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\},\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$$

(1)π_1与π_2相交$\Leftrightarrow\vec{n}_1$不平行于$\vec{n}_2\Leftrightarrow A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$;

(2)$\pi_1/\!/\pi_2$，或重合$\Leftrightarrow\vec{n}_1/\!/\vec{n}_2\Leftrightarrow A_1:B_1:C_1=A_2:B_2:C_2$.

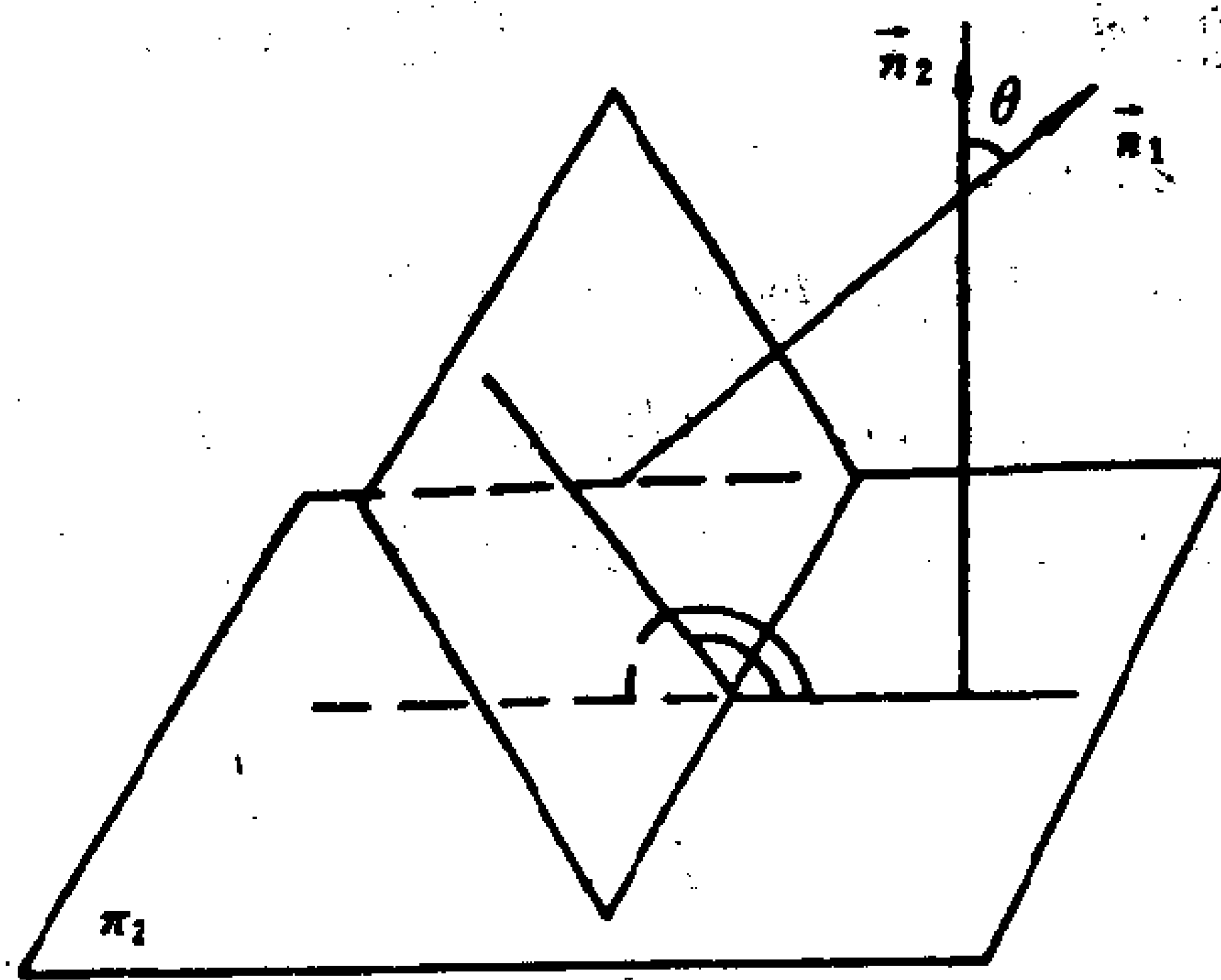


图 6-13

2. 两平面的交角

两平面π_1与π_2的交角是指它们交成的两个二面角中的任一个. 这两个二面角相邻且互补，易知其中一个就等于两平面的法向量$\vec{n}_1$、$\vec{n}_2$的交角(如图6—13). 即设π_1与π_2的交角为$\angle(\pi_1、\pi_2)$，则

$$\angle(\pi_1,\pi_2)=\angle(\vec{n_1},\vec{n_2})\text{或 }\pi-\angle(\vec{n_1},\vec{n_2}).$$

于是

$$\cos\angle(\vec{\pi}_1,\vec{\pi}_2)=\pm\cos\angle(\vec{n_1},\vec{n_2})=\pm\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} \quad (6.3\text{—}6)$$

若在直角坐标系下，π_1、π_2的方程是(6.3—1)和(6.3—2). 则

$$\cos\angle(\pi_1,\pi_2)=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \quad (6.3\text{—}6')$$

(6.3—6)(6.3—6′)就是计算两平面交角的公式. 由此公式容易得到

定理6.3.2 两平面 π_1(6.3—1)，π_2(6.3—2)互相垂直的充要条件是

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

证明 $\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow\angle(\pi_1,\pi_2)=2\Leftrightarrow\cos\angle(\pi_1,\pi_2)=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

评注 两平面的交角是从量的方面来反映两平面的位置关系，能细致反映两平面相交的情况，而两平面平行或重合则是交角为0或 π 的特殊情况.

二、常用方法及应用举例

例1 判断下列各对平面的相关位置，并求各对平面的交角 θ：

(1) $x+4z+1=0$ 与 $3x+12z-2=0$;

(2) $x-\sqrt{2}y+z-1=0$ 与 $x+\sqrt{2}y-z+3=0$;

(3) $2x-5y+z=0$ 与 $x-2z-3=0$;

(4) $3x+9y-6z+2=0$ 与 $-x-3y+2z-\frac{2}{3}=0$.

解 根据定理6.3.1及两平面交角的余弦公式：

(1)因$\frac{1}{3}=\frac{0}{0}=\frac{4}{12}\neq-\frac{1}{2}$，所以两平面平行

$$\theta=0°\text{或}180°$$

(2)因$\frac{1}{1}\neq-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$，所以两平面相交，而

$$\cos\theta=\pm\frac{1-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-1}{\sqrt{1+2+1}\sqrt{1+2+1}}=\pm\frac{1}{2}$$

$\therefore \quad \theta=60°$或$120°$

(3)因$\frac{2}{1}\neq\frac{-5}{0}$，所以两平面相交，而

$$\cos\theta=\pm\frac{2-5\cdot0-2}{\sqrt{4+25}\sqrt{1+4}}=0$$

$\therefore \quad \theta=90°$

(4)因$\frac{3}{-1}=\frac{9}{-3}=\frac{-6}{2}=\frac{2}{-\frac{2}{3}}$，所以两平面重合，即

$$\theta=0°\text{或}180°$$

例2 求过z轴且与平面$2x+y-\sqrt{5}z-7=0$成60°角的平面π的方程.

解 π过z轴，故可设π的方程为

$$Ax+By=0$$

又π与平面$2x+y-\sqrt{5}z-7=0$成60°角，则

$$\cos60°=\pm\frac{2A+B}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{4+1+5}}$$

两边平方，整理得

$$3A^2+8AB-3B^2=0$$

解得 $\quad \frac{A}{B}=\frac{1}{3}$或$\frac{A}{B}=-\frac{3}{1}$

所以π的方程是

$$x+3y=0 \text{或} 3x-y=0.$$

例3 正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧面对其底面的倾角为 β，K 是侧棱 SB 的中点，如图6—14. 求平面 ACK 与平面 SAB 间的夹角 θ.

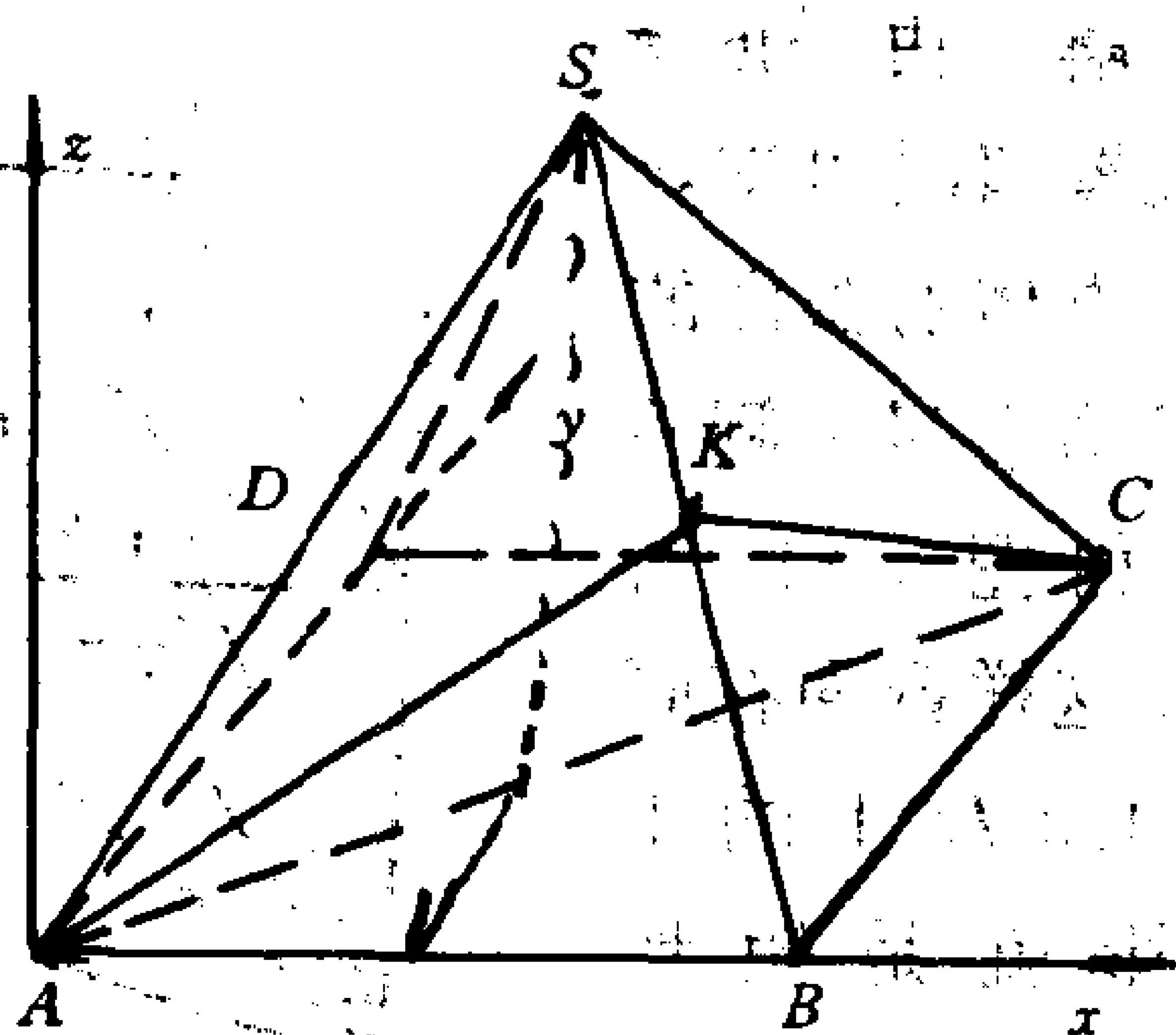


图 6 14

解 本题自然会想到要写出两平面的方程，再由方程计算夹角 θ，为此先建立直角坐标系：以 A 为坐标原点，AB、AD 直线为 x 轴、y 轴，由此再定 z 轴（如图6—14）. 设正方形 $ABDC$ 的边长为 $2a$，则各点的坐标为

$$A(0,0,0), B(2a,0,0), C(2a,2a,0)$$

$$S(a,a,a\mathrm{tg}\beta), K(\frac{3}{2}a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\mathrm{tg}\beta).$$

于是可写出下列两平面的方程：

$$AKC: x\mathrm{tg}\beta - y\mathrm{tg}\beta - 2z = 0$$

$$SAB: y\mathrm{tg}\beta - z = 0$$

那么

$$\cos\theta = \pm\frac{-\mathrm{tg}^2\beta+2}{\sqrt{2\mathrm{tg}^2\beta+4}\sqrt{\mathrm{tg}^2\beta+1}} = \pm\frac{3\cos^2\beta-1}{\sqrt{2(1+\cos^2\beta)}}$$

所以 $\theta = \arccos t$ 或 $\pi - \arccos t$

其中 $t = \dfrac{|3\cos^2\beta-1|}{\sqrt{2(1+\cos^2\beta)}}$

例4 过长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 AC_1，作与底面 $ABCD$ 的对角线 BD 平行的平面 π，如果 $|AB|=a$，

$|AD|=b$，$|AA_1|=c$，计算平行六面体与平面 π 的截面的面积 S.

解 由平面 π 的位置情况可知，π 与长方体的截面的周界均在四个侧面上（如图 6—15 所示）．这样截面在底面 $ABCD$ 上的正投影就是矩形 $ABCD$．设平面 π 与底面 $ABCD$ 的交角为 θ，则有关系：$S|\cos\theta|=S_{ABCD}$，由此只要求得 $\cos\theta$，就可求得 S．为此

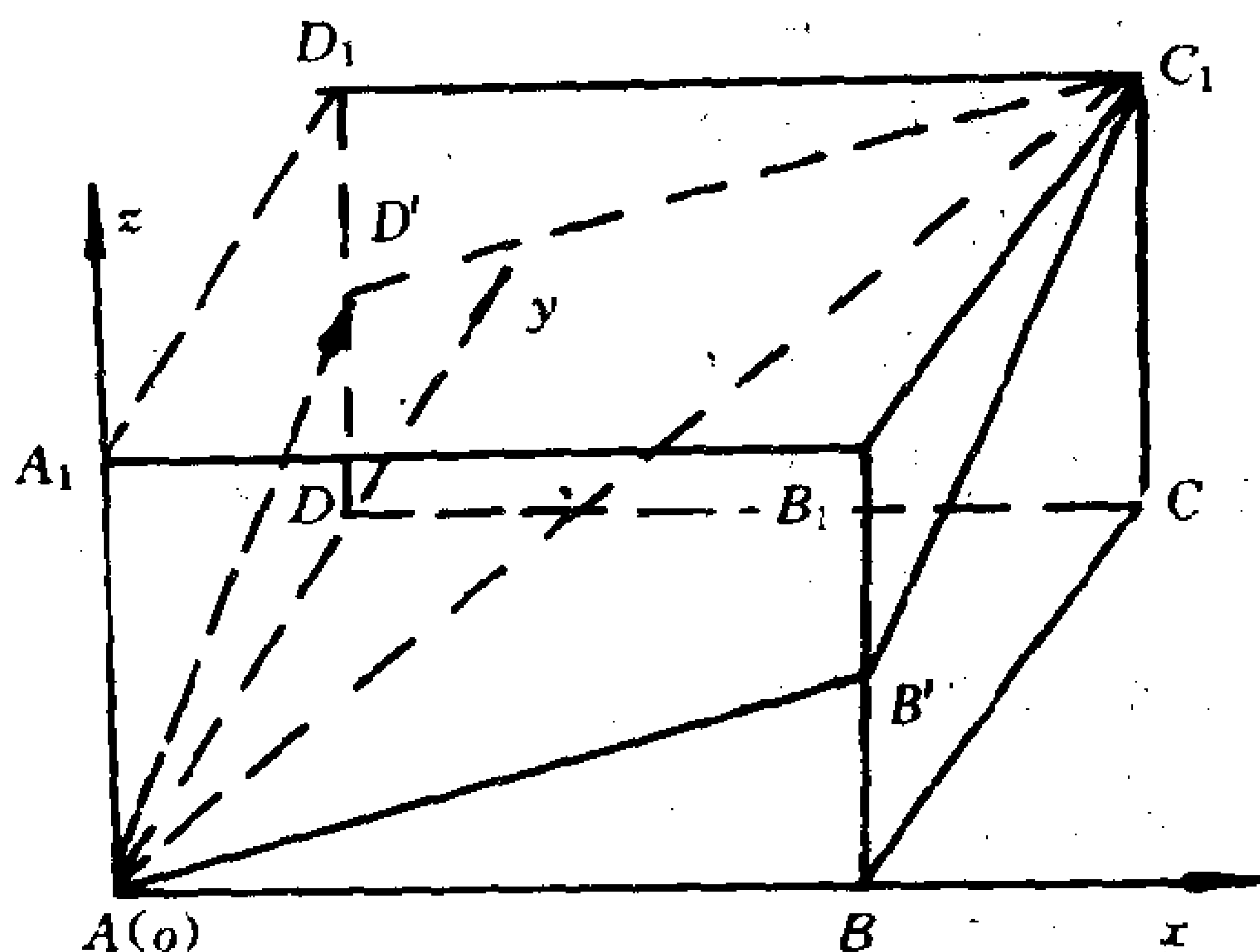


图 6—15

以 A 为原点，以直线 AB、AD、AA_1 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立直角坐标系如图6—15，则各点的坐标如下：

$$A(0,0,0),B(a,0,0),D(0,b,0),A_1(0,0,c),C_1(a,b,c)$$

依题意，平面 π 过 A，且平行于矢量 $\overrightarrow{AC_1}$，$\overrightarrow{BD}$，那么可写出 π 的方程为

$$bcx+acy-2abz=0$$

而平面 ABC 的方程是 $z=0$，则 π 与平面 ABC 的交角 θ 满足

$$|\cos\theta|=\frac{|0+0-2ab|}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+4a^2b^2}}=\frac{2ab}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+4a^2b^2}}$$

则

$$S=\frac{S_{ABCD}}{|\cos\theta|}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+4a^2b^2}$$

例5 过四面体三个面的重心所作的平面，必与第四面平

行，试证之.

证明 设 $SABC$ 为已知四面体，建立仿射标架 $\{S;\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\}$（如图6—16）则四面体各顶点坐标为

$S(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$. 那么可得 $\triangle SAB$，$\triangle SBC$，$\triangle SCA$ 的重心坐标分别是：$G_1(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0)$，$G_2(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，$G_3(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3})$，因而平面 $G_1G_2G_3$ 的方程是

$$\begin{vmatrix} x-\frac{1}{3} & y-\frac{1}{3} & z \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}=0$$

即 $$x+y+z-\frac{2}{3}=0$$ 而平面 ABC 为

$$x+y+z+1=0$$

根据定理6.3.1，平面 $G_1G_2G_3$ // 平面 ABC，故命题得证.

小结 判断两平面的位置关系，计算两平面的交角，只要知道平面的方程就可完全解决. 但必须注意，计算交角所用的方程必须是直角坐标系下的，如例1、2的坐标系应是直角坐标系，例3、4也只能建立直角坐标系. 而判断位置关系所用的方程，可以是一般仿射坐标系下的，如例5只是判断位置关系且重心坐标的计算不依赖直角坐标系，就可建立一般仿射坐标系. 采用何种坐标系要根据问题的实际通盘考虑，一般地，如题目中涉及到距离、角度等概念，宜用直角坐标系，这主要是在直角坐标系下计算距离、角度最简便. 如题目中只涉及点线面的结合关系，顺序关系（如相关位置，定比分割等）不妨选用仿射坐标系。从上面诸例中看到，建立恰当的坐标系（种类恰

当，位置恰当）给问题的解决带来很大的方便．有人担心这样建立的坐标系不具"一般性"，这种担心是不必要，坐标系是解决问题的工具，是人为地加到问题上去的，并不影响几何问题本身的性质．

下面可看到在一般仿射坐标系下，处理一类轨迹问题的例子．

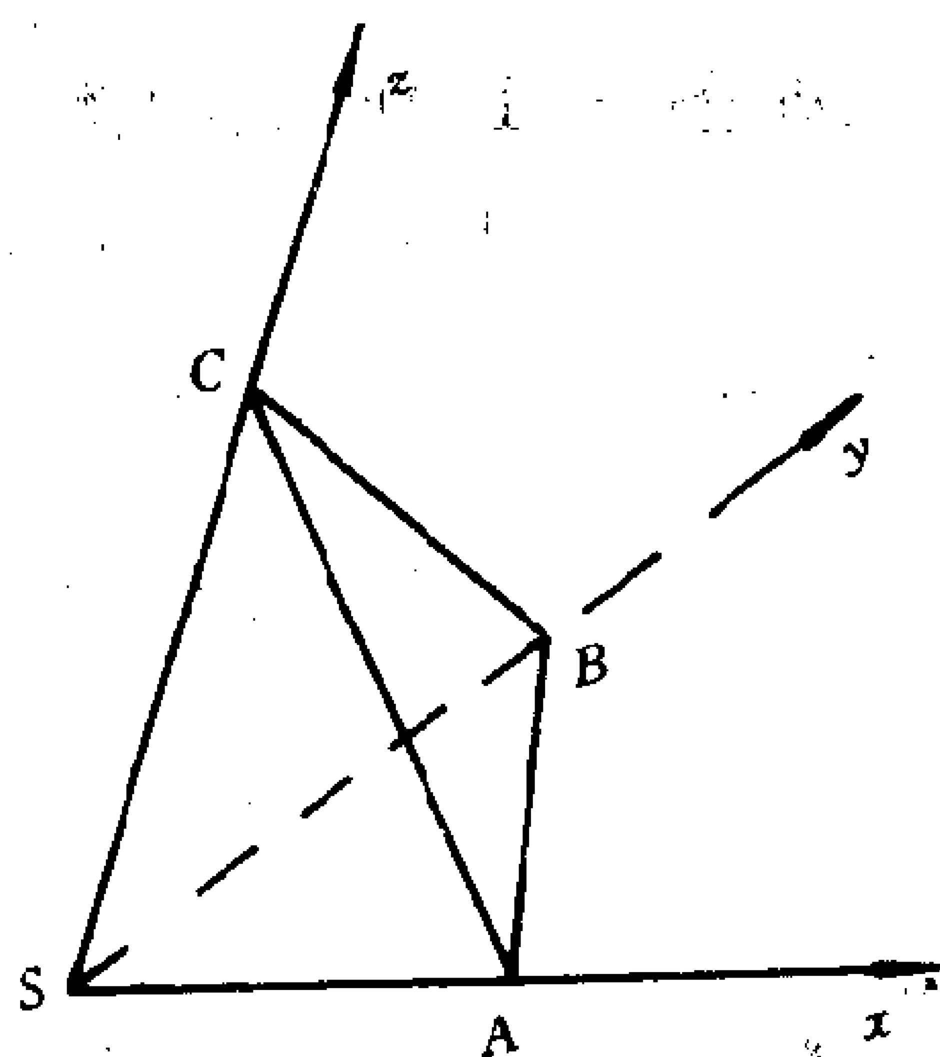


图 6—16

例6 在一般仿射坐标系下由定点 $S(x_1,y_1,z_1)$ 向已知平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 引直线，交 π 于 M，P 点分线段 SM 为定比 $\lambda(\neq -1,0)$，即 $\overrightarrow{SP}=\lambda\overrightarrow{PM}$，求点 P 的轨迹．

解 设 P 点坐标为 (x,y,z)，M 点坐标 (x_0,y_0,z_0)，由 $\overrightarrow{SP}=\lambda\overrightarrow{PM}$ 有

$$\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}=\lambda\{x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1\}$$

于是得

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{(1+\lambda)x-x_1}{\lambda} \\ y_0=\dfrac{(1+\lambda)y-y_1}{\lambda} \\ z_0=\dfrac{(1+\lambda)z-z_1}{\lambda} \end{cases}$$

$M\in\pi$，故

$$\frac{(1+\lambda)x-x_1}{\lambda}+B\frac{(1+\lambda)y-y_1}{\lambda}+C\frac{(1+\lambda)z-z_1}{\lambda}+D=0$$

整理得

$$Ax+By+Cz+\frac{\lambda D-(Ax_1+By_1+Cz_1)}{1+\lambda}=0$$

即为 P 点轨迹方程，P 点轨迹是一平行于 π 的平面.

评注 例6是轨迹问题，因此下述命题成立，如果由点 S 向已知两平行平面 π,π' 引直线（S 不在 π 和 π' 上），交 π 于 M，交 π' 于 P，则有向线段的比值 $\frac{SP}{PM}$ 一定.

例7 在一般仿射坐标系中，已知两平行平面 $\pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$ 和 $\pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$，$D_1^2+D_2^2\neq 0$，求平行于它们的两个平面并将它们之间的距离三等分.

分析 利用例6的结果来解，为此取定平面为 π_2（或 π_1），定点 S 就应取在 π_1（或 π_2）上. 由 S 引直线交 π_2 于 M，则所求的两平面分别就是内分 SM 为1∶2和2∶1的分点 P 的轨迹（即 $\overrightarrow{SP}=\lambda\overrightarrow{PM}$，$\lambda=\frac{1}{2}$，$\lambda=2$时）.

解 不妨设 $A\neq 0$，则可在 π_1 上取得点 $S(-\frac{D_1}{A},0,0)$，由 S 作直线交 π_2 于 M，由例6使得 $\overrightarrow{SP}=\lambda\overrightarrow{PM}$ 的 P 点轨迹方程是

$$Ax+By+Cz+\frac{\lambda D_2-[A\cdot(-\frac{D_1}{A})]}{1+\lambda}=0$$

即 $$Ax+By+Cz+\frac{D_1+\lambda D_2}{1+\lambda}=0$$

当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时为

$$Ax+By+Cz+\frac{1}{3}(2D_1+D_2)=0 \qquad (1)$$

当 $\lambda=2$时为

$$Ax+By+Cz+\frac{1}{3}(D_1+2D_2)=0 \qquad (2)$$

(1)、(2)即为所求的平面方程.

评注 凡是求到两个已知平行平面的距离的比为定值的问题都可类似例7那样去求解，而不必去求距离.

习 题 6.3

1. 分别在下列条件下确定 l,m,n 的值：

(1)使$(l-3)x+(m+1)y+(n-2)z+8=0$和$(m+3)x+(n-9)y+(l-3)z-16=0$表示同一平面；

(2)使 $mx+3y-2z-1=0$和$2x-5y-lz=0$表示二平行平面；

(3)使$5x+y-3z-2=0$与$2x+ly-3z+1=0$互相垂直；

(4)使 $x+ly-2z-9=0$与$2x-3y+z=0$成 $\pi/4$的角.

2. 求下列平面的方程：

(1)通过点 $M_1(0,0,1)$和 $M_2(3,0,0)$，且与坐标面 xoy 面成60°角的平面；

(2)通过点$(2,0,-3)$且同时垂直于两平面 $x-2y+4z-7=0$与$3x+5y-2z+1=0$的平面.

3. 证明：平面 $z=px+qy+l$ 上的图形 F 的面积与它在 xoy 面上的投影 F 的面积有如下的关系：$S(F)=\sqrt{1+p^2+q^2}S_{(\vec{F})}$

4. 过立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$的对角线中点作垂直于该对角线的平面 π，如果立方体的棱长等于 a，求立方体与平面 π 的截面之面积.

5. 已给正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，平面 π 过其上下底的对角线，平面 π'过下底边及其相对的上底边，设棱台高等于 h，$|AB|=a$，$|A_1B_1|=b$，求平面 π 与 π' 所夹之锐角 φ.

6. 设有三个平行平面 π_i：$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0(i=1,2,3)$，一直线 l 与 π_1、π_2、π_3分别交于 P、Q、R，求 Q 分有向线段 PR 的比值.

7. 设三平行平面 π_i：$Ax+By+Cz+D_i=0(i=1,2,3)$，L、M、N 分

别属于平面 π_1、π_2、π_3的任意点，求$\triangle LMN$ 的重心轨迹.

8. 在怎样的条件下，平面 $Ax+By+Cz+D=0$与 x 轴和 y 轴成等角?在怎样的条件下，它与所有三个轴(x 轴、y 轴、z 轴)成等角?

9. 在仿射坐标系下已知两平行平面 $\pi_1:4x+6y+2z-7=0$，$\pi_2:2x+3y+z+5=0$，写出两平行平面正中间的平面方程.

10. 在仿射坐标系下，已知两平面 $\pi_1:2x-y-z+3=0$，$\pi_2:4x-2y-2z+5=0$，写出平行于两个已知平面，但不位于它们之间且到 π_1的距离是到 π_2的距离是两倍的平面方程.

§6.4 平面与点的相关位置

一、基本内容

在直角坐标系下讨论平面与点的相关位置.

空间中任一点 M_0与一已知平面 π 的相关位置有且只有两种情况：

(1)$M_0\in\pi$，其充要条件是 M_0的坐标满足 π 的方程；

(2)$M_0\notin\pi$，其充要条件是 M_0的坐标不满足 π 的方程.

这两种位置关系可以用点到平面的距离这个量来描述：设 M_0到 π 的距离为 d，则

(1)$M_0\in\pi\Leftrightarrow d=0$；

(2)$M_0\notin\pi\Leftrightarrow d\neq 0$，且 d 的大小表示了 M_0距 π 的远近.

但用点与平面间的离差的概念来描述点与平面的相关位置则要细致一些，它可以区分出不在平面上的点位于平面的哪一侧，而离差的绝对值正好是点到平面的距离.

1. 点与平面间的离差

定义6.4.1 自点 M_0向平面 π 引垂线，垂足为 Q，则矢量$\overrightarrow{QM_0}$在平面 π 的单位法矢量$\overrightarrow{n^\circ}$上的射影叫做点 M_0与平面 π

间的离差，记作

$$\delta(M_0,\pi)=\text{射影}_{\vec{n}^\circ}\overrightarrow{QM_0}$$

(1)离差的计算公式

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 与平面 $\pi:\vec{n}^\circ\vec{r}-p=0$(或 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$)间的离差为

$$\begin{aligned}\delta(M_0,\pi)&=\vec{n}^\circ\,\vec{r}_0-p\\&=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p\end{aligned}$$

其中 $\vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0}=\{x_0,y_0,z_0\}$

即先把 π 的方程化成法式方程，再把 M_0的坐标代入法式方程右边，计算那得 $\delta(M_0,\pi)$.

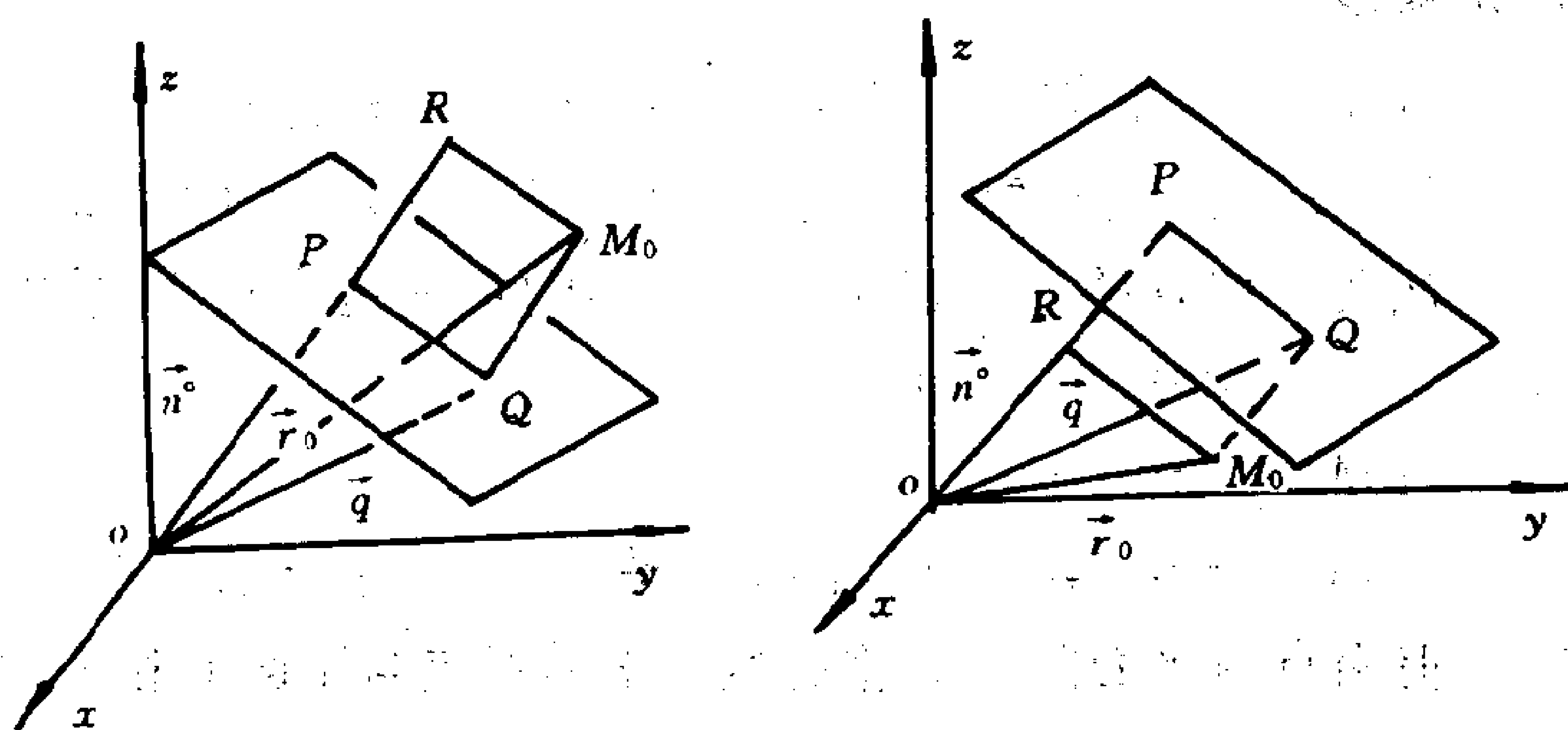


图6—17

证明 图6—17，根据定义

$$\begin{aligned}\delta(M_0,\pi)&=\text{射影}_{\vec{n}^\circ}\overrightarrow{QM_0}=\vec{n}^\circ\cdot\overrightarrow{QM_0}\\&=\vec{n}^\circ(\overrightarrow{OM_0}-\overrightarrow{OQ})=\vec{n}^\circ(\vec{r}_0-\vec{q})\end{aligned}$$

$$=\overrightarrow{n^\circ}\,\overrightarrow{r_0}-\overrightarrow{n^\circ}\,\overrightarrow{q}$$

$$=\overrightarrow{n^\circ}\,\overrightarrow{r_0}-p$$

其中因 Q 在 π 上;故 $\overrightarrow{n^\circ}\,\overrightarrow{q}=p$,当 $\overrightarrow{n^\circ}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 时,即

$$\delta(M_0,\pi)=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p$$

(2)离差的几何意义

①离差符号的几何意义:

由 $\delta(M_0,\pi)=\overrightarrow{n^\circ}\cdot\overrightarrow{QM_0}=QM_0\cos\theta.\quad \theta=\angle(\overrightarrow{n^\circ},\overrightarrow{QM_0})$

故

$$\delta(M_0,\pi)\begin{cases}>0\Leftrightarrow 0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow M_0\text{位于}\overrightarrow{n^\circ}\text{所指向的一侧;}\\ =0\Leftrightarrow\overrightarrow{QM_0}=0\Leftrightarrow M_0\text{在}\ \pi\ \text{上;}\\ <0\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi\Leftrightarrow M_0\text{位于}-\overrightarrow{n^\circ}\text{所指向的一侧.}\end{cases}$$

②离差绝对值的几何意义:就是点 M_0 到平面 π 的距离.

$$|\delta(M_0,\pi)|=d=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|.$$

当 π 的一般方程为 $Ax+By+Cz+D=0$ 时,则

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

这与在§6.2例7的评注中所推得的结果是一样的.

2.平面划分空间问题

由离差 δ 的符号的几何意义,两点在平面 π 的同侧,其 δ 符号相同,两点在 π 异侧,其 δ 符号不同,这样平面 π 就把空间的点分成三部分:位于 $\overrightarrow{n^\circ}$ 指向一侧的点,其 $\varepsilon>0$;位于另一

侧的点，其 $\delta<0$；在 π 上的点 $\delta=0$. 进一步还有下面的结果：

定理6.4.1 平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$把空间的点分为三部分：

点 $M(x,y,z)$在 π 上当且仅当 $Ax+By+Cz+D=0$；

点 $M(x,y,z)$在 $\vec{n}=\{A,B,C\}$指向的一侧，当且仅当 $Ax+By+Cz+D>0$；

点 $M(x,y,z)$在$-\vec{n}=\{A,B,C\}$指向的一侧，当且仅当 $Ax+By+Cz+D<0$.

证明 M 对平面 π 的离差

$$\delta=\lambda(Ax+By+Cz+D)$$

其中 λ 是 π 的法化因子，则

$$Ax+By+Cz+D=\frac{1}{\lambda}\delta$$

设 M 在 $\vec{n}$ 指向的一侧，若 $D\leqslant 0$，则要取 $\lambda>0$，此时 $\vec{n}^0$与 $\vec{n}$ 同向，故 $\delta>0$，于是$\frac{1}{\lambda}\delta>0$. 若 $D>0$，则要取 $\lambda<0$，此时 $\vec{n}^0$与 $\vec{n}$ 反向，故 $\delta<0$，仍有$\frac{1}{\lambda}\delta>0$. 因此 $Ax+By+Cz+D>0$.

反之，设 M 的坐标使 $Ax+By+Cz+D>0$，即$\frac{1}{\lambda}\delta>0$. 若 $\lambda>0,\delta>0$，则由 $\lambda>0$有 $\vec{n}^0$与 $\vec{n}$ 同向，由 $\delta>0$有 M 位于 $\vec{n}^0$ 指向的一侧，故 M 位于 $\vec{n}$ 指向的一侧. 若 $\lambda<0,\delta<0$，则 $\vec{n}$ 与 $\vec{n}$ 反向且 M 位于$-\vec{n}$指向的一侧，于是 M 位于 $\vec{n}$ 指向的一侧，总之 M 位于 $\vec{n}$ 指向的一侧. 类似地可证明小于0的结论成立.

二、常用方法举例

例1 已知平面 $\pi: 4x-4y-2z+3=0$,

(1)点 P 与平面 π 的离差为2,求点 P 的轨迹;

(2)点 P 到平面 π 的距离为2,求点 P 的轨迹.

解 π 的法式方程是

$$\frac{4x-4y-2z+3}{-6}=0$$

设 P 点坐标为 (x,y,z),则

(1) $$\delta(M,\pi)=\frac{4x-4y-2z+3}{-6}=2$$

整理得 $4x-4y-2z+15=0$.

所以 P 点的轨迹是平面 $4x-4y-2z+15=0$.

(2) $$d=\frac{|4x-4y-2z+3|}{6}=2$$

去掉绝对值符号为

$$\frac{4x-4y-2z+3}{6}=2 \text{或} \frac{4x-4y-2z+3}{6}=-2$$

即 $4x-4y-2z-9=0$ 或 $4x-4y-2z+15=0$.

所以 P 点的轨迹是两个平面 $4x-4y-2z-9=0$ 和 $4x-4y-2z+15=0$.

例2 已知两相交平面 $\pi_1: x-y+2z-5=0$ 和 $\pi_2: 2x-y+z+7=0$.

(1)求 π_1,π_2 所构成的二面角的角平分面;

(2)求 π_1,π_2 所构成的二面角中含点 $M_0(1,-1,1)$ 的那个二面角的角平分面.

解 (1)设 $P(x,y,z)$ 是所求角平分面上任一点,则 P 到 π_1,π_2 的距离相等,即

$$\frac{|x-y+2z-5|}{\sqrt{6}}=\frac{|2x-y+z+7|}{\sqrt{6}}$$

去掉绝对值符号，整理得

$$x-z+12=0 \quad 与 \quad 3x-2y+3z+2=0$$

即为所求角平分方程.

(2)由直接计算可得 $\delta(M_0,\pi_1)>0,\delta(M_0,\pi_2)<0$.

设$P(x,y,z)$为所求角平分面上任一点，则$\delta(P,\pi_1)$，$\delta(P,\pi_2)$的符号分别与$\delta(M_0,\pi_1)$，$\delta(M_0,\pi_2)$同号，这样 P 到π_1,π_2的距离可表为 $\delta(P,\pi_1)$和$-\delta(P,\pi_2)$，由角平分面的性质可得到

$$\delta(P,\pi_1)=-\delta(P,\pi_2)$$

$$\frac{x-y+2z-5}{\sqrt{6}}=-\frac{2x-y+z+7}{-\sqrt{6}}$$

整理得 $x-z+12=0$，即为所求的角平分面方程.

评注 用点到平面的距离公式解题，一般可得到两个解，而要确定其中的一个，需要附加条件，并利用某些点的离差的符号加以判定，这些点有些是在题目中明显给出的，有些则要从题目已知中去发掘.

例3 设球面半径为6，它与平面 $\pi:x+2y-2z+1=0$相切于点 $M_0(3,0,2)$，且该球面和点 $P(0,1,2)$位于 π 的同侧，求该球面的方程.

分析 只要求出球心 Q 的坐标本题即得解，而球心 Q 满足：(1) $\overrightarrow{OM}_0\perp\pi$，则$\overrightarrow{OM}_0$平行于$\pi$的法矢量$\{1,2,-2\}$，(2) $\delta(0,\pi)$的绝对值为6，符号应与$\delta(P,\pi)$同号，于是可解答如下：

解 设球心为$Q(x_0,y_0,z_0)$，则由$\overrightarrow{OM}_0$平行$\{1,2,-2\}$

$$\frac{x_0-3}{1}=\frac{y_0}{2}=\frac{z_0-2}{-2} \tag{1}$$

又，计算得 $\delta(p,\pi)=\frac{1}{3}>0$，那么

$$\delta(0,\pi)=\frac{x_0+2y_0-2z_0+1}{-3}=6 \qquad (2)$$

解(1)(2)联立方程组得 $x_0=1, y_0=-4, z_0=6$. 所以球面方程为 $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-6)^2=36$.

例4 已知一四面体的各顶点是：$A(-1,-2,0)$，$B(5,0,5)$，$C(3,2,2)$，$D(-1,0,2)$. 写出以 AB 为棱心的内二面角 $C-AB-D$ 的角平分面方程.

解 由平面上三点的坐标可得下列两平面方程：

平面 ABC：$2x-y-2z=0$

平面 ABD：　　$x+2y-2z+5=0$

设 $P(x,y,z)$ 为所求角平分面上任一点(如图6—18)，由题目可发掘得：D 与 P 在平面 ABC 同侧，C 与 P 在平面 ABD 同侧，于是 $\delta(D,ABC)$ 与 $\delta(P,ABC)$ 同号，$\delta(C,ABD)$ 与 $\delta(P,ABD)$ 同号，而由直接计算可得 $\delta(D,ABC)=-2<0$，$\delta(C,ABD)=-83<0$，那么 P 到两平面的距离可表示为：$-\delta(P,ABD)$ 和 $-\delta(P,ABC)$，再由 P 点的性质有

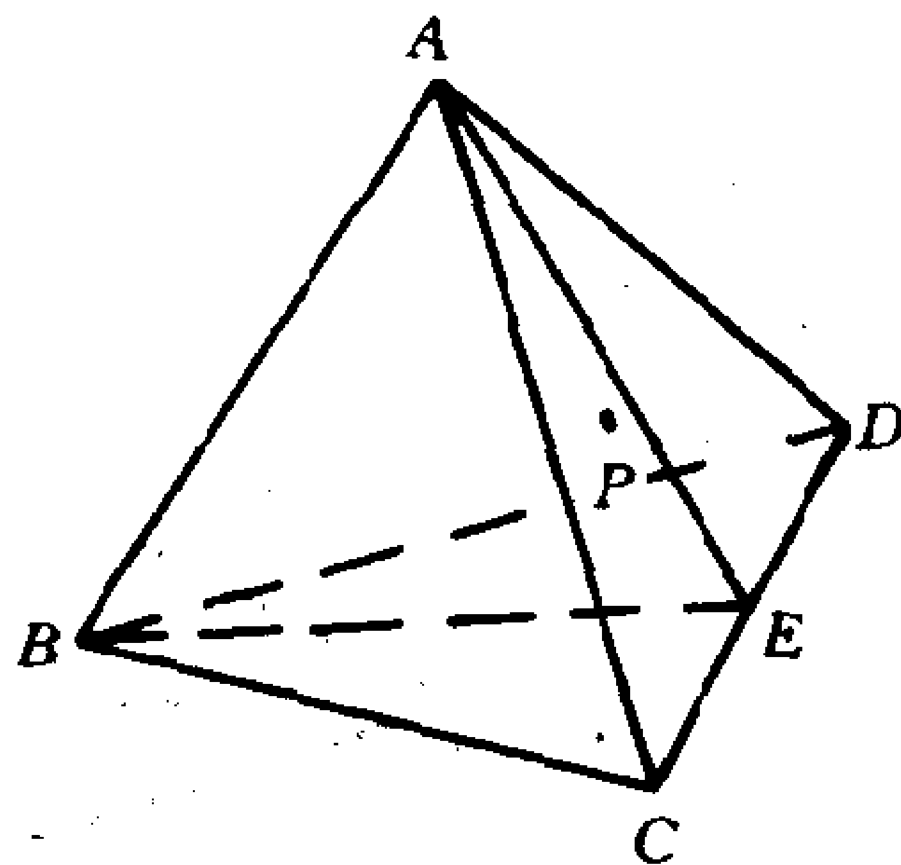


图 6—18

$$-\delta(P,ABD)=-\delta(P,ABC)$$

即
$$-\frac{1}{3}(2x-y-2z)=\frac{1}{3}(x+2y-2z+5)$$

整理得　$3x+y-4z+5=0$

即为所求的角平面方程.

例5 已知一球面切于由三个坐标面和平面 $\pi: x+2y-2z+8=0$ 所构成的四面体，如图6—19，求球心的坐标.

分析 四面体的内切球是唯一存在的，其球心 Q 在四面体内部且到四个面的距离相等，如用距离公式求解，则由于距离公式带有绝对值符号，将要解八个方程组，且最后还得从多组解中确定出一组解，势必相当麻烦. 可以象上面例3、4那样先判断球心 Q 与四个平面的离差的符号（如 QO 与 π 的离差同号），然后用离差带上一定的符号（+或-）来表示距离，再列方程求解，将要简便得多.

解 设内切球的球心为 $Q(x_0, y_0, z_0)$. 首先可求得 π 与三坐标轴的交点（即四面体的三个顶点）的坐标：$A(-8,0,0)$，$B(0,-4,0)$，$C(0,0,4)$（如图6—19）.

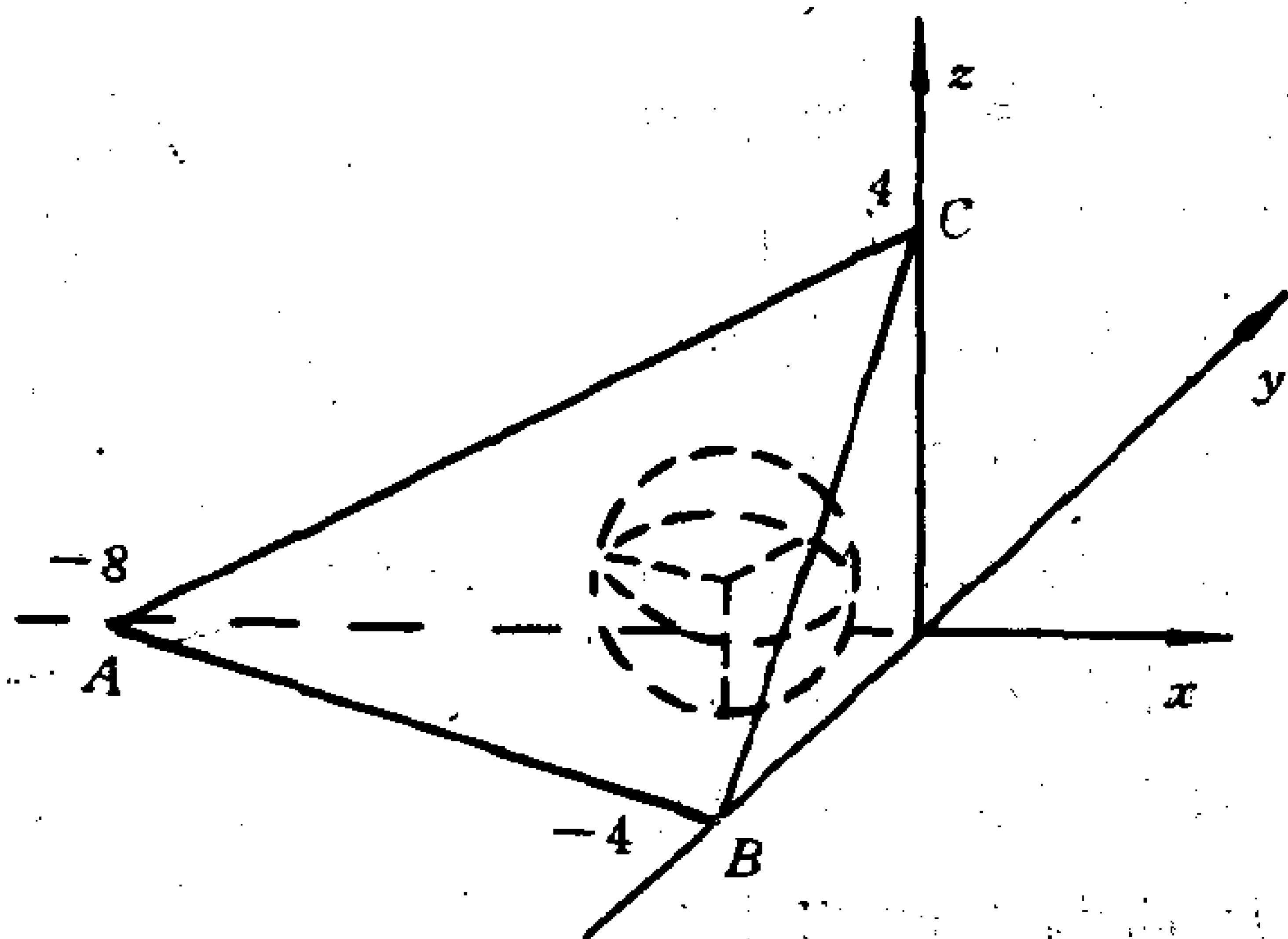


图 6—19

计算可得 $\delta(0,\pi)=-\frac{8}{3}<0$，而 Q 与0在 π 的同侧，所以

$$\delta(Q,\pi)=-\frac{1}{3}(x_0+2y_0+8)<0.$$

同理可得 $\delta(Q,xy)=z_0>0$，$\delta(Q,yz)=x_0<0$ $\delta(Q,xz)=$

$y_0<0$.这样 Q 到四个平面的距离可依次表为

$$\frac{1}{3}(x_0+2y_0-2z_0+8), z_0, -x_0, -y_0.$$

Q 到四个平面距离相等,可得方程组

$$\begin{cases} -x_0=-y_0 \\ -x_0=z_0 \\ \frac{1}{3}(x_0+2y_0-2z_0+8)=z_0 \end{cases}$$

解得 $x_0=-1, y_0=-1, z_0=1$

即球心坐标是(-1,-1,1).

小结 在例2(2)到例5的解答中,都要求某个点或某类点到某些平面的距离的表达式,但不是直接用点到平面的距离公式,而是用这些点与相应平面的离差带上正号或负号来表示距离,离差的符号则可以由题目中一些已知点与一平面的离差的符号来判断.这种方法可使解答简单而得到的结果又确定.

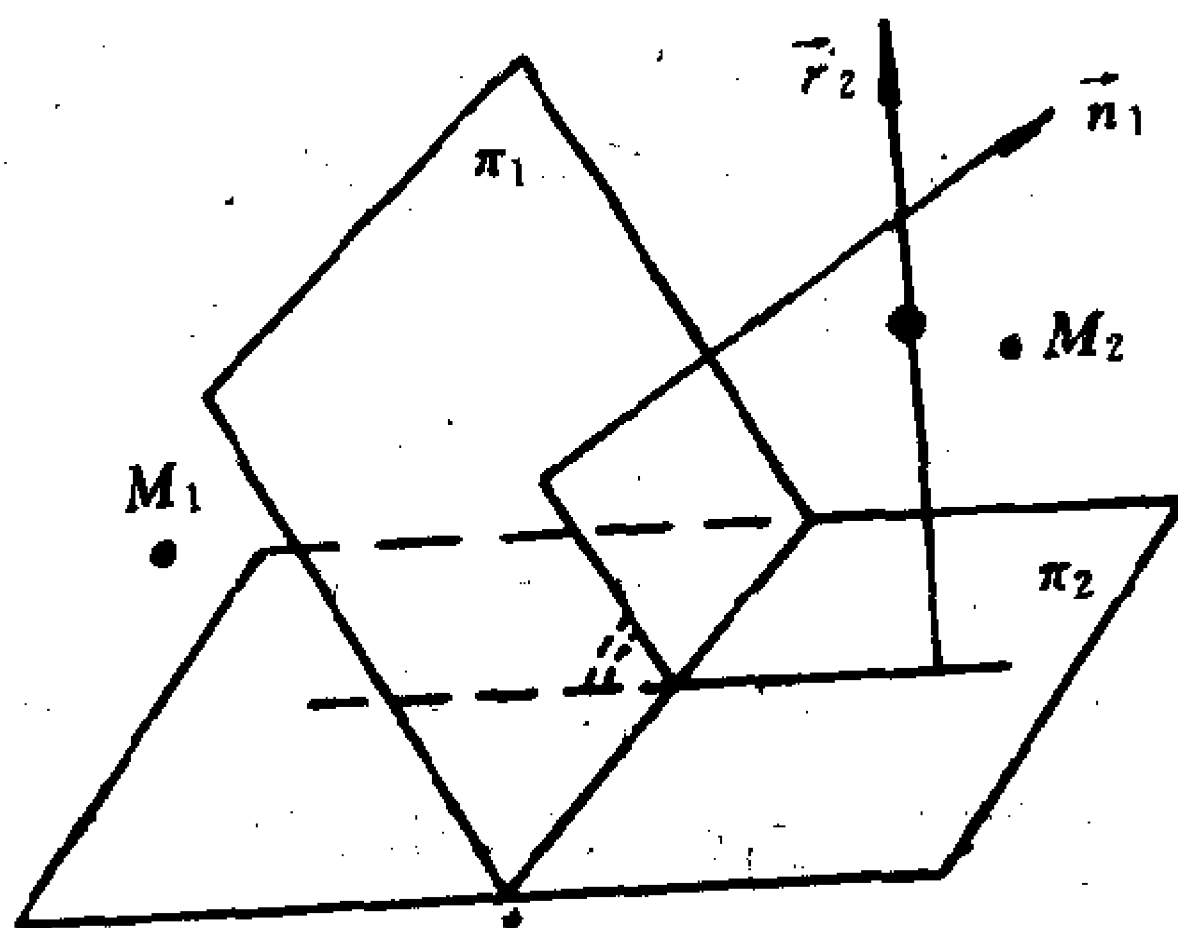


图 6—20

例6 已知两相交平面 $\pi_1: x-2y+3z-5=0$. $\pi_2: 2x-y-z+3=0$,及点 $M_1(3,2,1)$,$M_2(2,-1,1)$,如图6—20,问:

(1)π_1、π_2所交成的二面角中,含 M_1的二面角是钝角还是锐角.

(2)M_1、M_2是在同一二面角内,还是分别在相邻的二面角

内，或是在对顶的二面角内.

解 π_1,π_2的法矢量分别是$\overrightarrow{n_1}=\{1,-2,3\}$，$\overrightarrow{n_2}=\{2,-1,-1\}$. 把点$M_1(3,2,-1)$代入$\pi_1$、$\pi_2$方程的左边得

$$p_1=3-4-3-5<0$$

$$q_1=6-2+1+3>0$$

所以M_1在$-\overrightarrow{n}_1$和$\overrightarrow{n}_2$所指向的二面角内，而

$$\cos\angle(-\overrightarrow{n}_1,\overrightarrow{n}_2)=\frac{-\overrightarrow{n}_1,\overrightarrow{n}_2}{|-\overrightarrow{n}_1||\overrightarrow{n}_2|}=\frac{-3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}<0$$

所以$\angle(-\overrightarrow{n}_1,\overrightarrow{n}_2)$是钝角，那么$-\overrightarrow{n}_1,\overrightarrow{n}_2$所指向的二面角是锐角，即$M_1$在$\pi_1,\pi_2$所交成的锐二面角内.

(2)把M_2的坐标代入π_1,π_2方程左边得

$$p_2=2+2+3-5>0$$

$$q_2=2+1+1+3>0$$

由$p_1<0,p_2>0$得M_1,M_2在π_1的两侧，由$q_1>0,q>0$得M_1，M_2在π_2的同侧，因此M_1、M_2在相邻的两二面角内.

例7 试求由两个平面$\pi_1:2x-3y-4z-3=0$和$\pi_2:4x-3y+2z+5=0$所构成的锐二面角的角平分面方程.

解 π_1,π_2的单位法矢量分别是

$$\overrightarrow{n^\circ}_1=\{\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{-3}{\sqrt{29}},\frac{-4}{\sqrt{29}}\},\overrightarrow{n^\circ}_2=\{-\frac{4}{\sqrt{29}},\frac{3}{\sqrt{29}},\frac{-2}{\sqrt{29}}\}$$

因为

$$\cos\angle(\overrightarrow{n^\circ}_1,\overrightarrow{n^\circ}_2)=\frac{\overrightarrow{n^\circ}_1\cdot\overrightarrow{n^\circ}_2}{|\overrightarrow{n^\circ}_1||\overrightarrow{n^\circ}_2|}=\frac{-9}{\sqrt{29}}<0$$

所以$\angle(\overrightarrow{n^\circ}_1,\overrightarrow{n^\circ}_2)$是钝角，那么$\overrightarrow{n^\circ}_1,\overrightarrow{n^\circ}_2$,所指向一侧的二面角是锐角.

设 $P(x,y,z)$ 为锐二面角的角平分面上任一点，则 $\delta(P,\pi_1)$ 与 $\delta(p,\pi_2)$ 同为正的，由 P 点的性质得

$$\delta(P,\pi_1)=\delta(P,\pi_2)$$

即
$$\frac{2x-3y-4z+3}{\sqrt{29}}=\frac{4x-3y+2z+5}{-\sqrt{29}}$$

整理得
$$3x-3y-z+1=0$$

即为锐二面角的平分面.

小结 判定点在平面的那一侧或两平面的交角哪一个是锐角（钝角），可不用算离差，只要用平面的法矢量就行了. 如同时要用到离差，最好用平面的单位法矢量来讨论，象例7那样，这是因为单位法矢量所指向的那一侧的点，其离差一定是正的.

习 题 6.4

习题中的坐标系非特别说明均是直角坐标系.

1. 计算下列点和平面间的离差及距离：

(1) $M(1,2,1)$，π：$x+2y+2z-10=0$；

(2) $M(-4,-2,2)$，π：$9x+20y-12z+25=0$.

2. 求下列各点的坐标：

(1) 在 y 轴上，且到平面 $x+2y-2z-2=0$ 的距离等于4个单位的点.

(2) 在 z 轴上，且到点 $M(1,-2,0)$ 与到平面 $3x-2y+6z-9=0$ 相等的点.

(3) 在 x 轴上，且与平面 $12x-16y+15z+1=0$ 和 $2x+2y-z-7=0$ 的离差相等的点.

3. 已知四面体的四个顶点为 $S(0,6,4)$，$A(3,5,3)$，$B(-2,11,-5)$，$C(1,-1,4)$，求从顶点 S 向底面 ABC 所引高的长.

4. 中心在 $C(3,-5,-2)$ 且与平面 $2x-y-3z+11=0$ 相切的球面方程.

5. 求半径为7,且与平面$3x-6y+2z+14=0$相切于点$(2,1,7)$处的球面方程.

6. 一正方体二侧平面的方程是$x-2y-2z+4=0$和$2x+2y-z-13=0$,其中心是点$M_0(1,1,-2)$,求该正方体其余各侧平面方程.

7. 一正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$,已知平面ABC:$2x-y+2z+15=0$,平面ABB_1:$x-2y-2z+6=0$,以及侧面$A_1B_1C_1D_1$的中心$M_0(1,-1,0)$,求证正方体其余各侧面的方程.

8. 给定平面π:$Ax+By+Cz+D=0$及点$M_0(x_0,y_0,z_0)\in\pi$,平面π' $/\!/\pi$且π'到π的距离为h,π'与M_0位于π的同侧,求π'的方程.

9. 求与下列各对平面距离相等的点的轨迹:

(1)$2x-y+z-7=0$,$x+y+2z-11=0$;

(2)$9x-y+3z-14=0$,$9x-y+2z+6=0$.

10. 给出一四面体各顶点的坐标:$A(1,1,0)$,$B(0,2,0)$,$C(0,0,0)$,$D(1,5,7)$,写出内二面角$B-AD-C$的角平分面的方程.

11. 设一球面的半径为5,三平面方程为:

π_1:$3x-4y+10=0$,

π_2:$x-2y-2z+3=0$,

π_3:$x+2y+2z-5=0$.

此球内切于由三个平面构成的且含点$M_0(1,-1,-1)$的三面角,求该球面的方程.

12. 已知四面体各顶点坐标为$A(0,0,2)$,$B(3,0,5)$,$C(1,1,0)$,$D(4,1,2)$. 证明点$M_0(2,1/2,9/4)$在四面体内部.

13. 试求点$A(1,3,-2)$关于平面$2x-y+2z+8=0$的对称点(用离差).

14. 给定平面π_1:$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,π_2:$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$及点$M(x_0,y_0,z_0)$,证明点M_0位于π_1和π_2所夹锐角的内部当且仅当下列不等式成立.

$(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D)(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)<0$.

15. 一球面位于二平面$2x-4y-3z+21=0$和$5x-2z=0$所夹之锐角内，且和这二平面相切，假定它的中心在y轴上，求该球面的中心.

16. 试求由两个平面$3x-4y-z+5=0$和$4x-3y+z+5=0$所构成的钝二面角的角平分面的方程.

17. 试就下列各种情形，判定点$M(2,-1,3)$与坐标原点是在两个相交平面所构成的同一二面角内，还是在相邻的二面角内，还是在对顶的二面角内.

(1) $2x+3y-5z-15=0, 5x-y-3z-7=0$;

(2) $x+5y-z+1=0, 2x+17y+z+2=0$.

18. 给出两平面方程$\pi_1: x-2y-3z+5=0$，$\pi_2: 2x-4y-6z+7=0$，平面π_1，π_2把整个空间不属于两平面的点分成三个区域Φ_1、Φ_2、Φ_3，用不等式确定每个区域.

19. 证明：空间中满足条件$|Ax+By+Cz+D|<d^2$的点分布在两个平行平面

$Ax+By+Cz+(D+d^2)=0$与$Ax+By+Cz+(D-d^2)=0$之间.

20. 在仿射坐标系中，设$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$都不在平面$\pi: Ax+By+Cz+D=0$上，且$M_1\neq M_2$，证明：M_1与M_2在平面π同侧的充分必要条件是：

$$F_1=Ax_1+By_1+Cz_1+D \text{ 与 } F_2=Ax_2+By_2+Cz_2+D \text{ 同号}.$$

第7章 空间直线

§7.1 空间直线的方程

一、基本内容

1. 方向向量

和一直线平行的非零向量，称作这直线的方向向量，方向向量的方向角 α、β、γ 和方向余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 分别称作直线的方向角和方向余弦，所有与直线方向余弦成比例的三个数 x、y、z 都称为直线的方向数. 空间直线的方向可由它的方向向量、方向角、方向余弦、方向数来确定. 由于讨论的空间直线不是有向直线，因而其方向角、方向余弦不唯一，实际上，若 α、β、γ 是直线 l 的方向角，由 $\pi-\alpha$、$\pi-\beta$、$\pi-\gamma$，也是直线 l 的方向角，而 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 和 $-\cos\alpha$、$-\cos\beta$、$-\cos\gamma$ 也都是直线 l 的方向余弦，直线的方向向量和方向数有无穷多个和无穷多组.

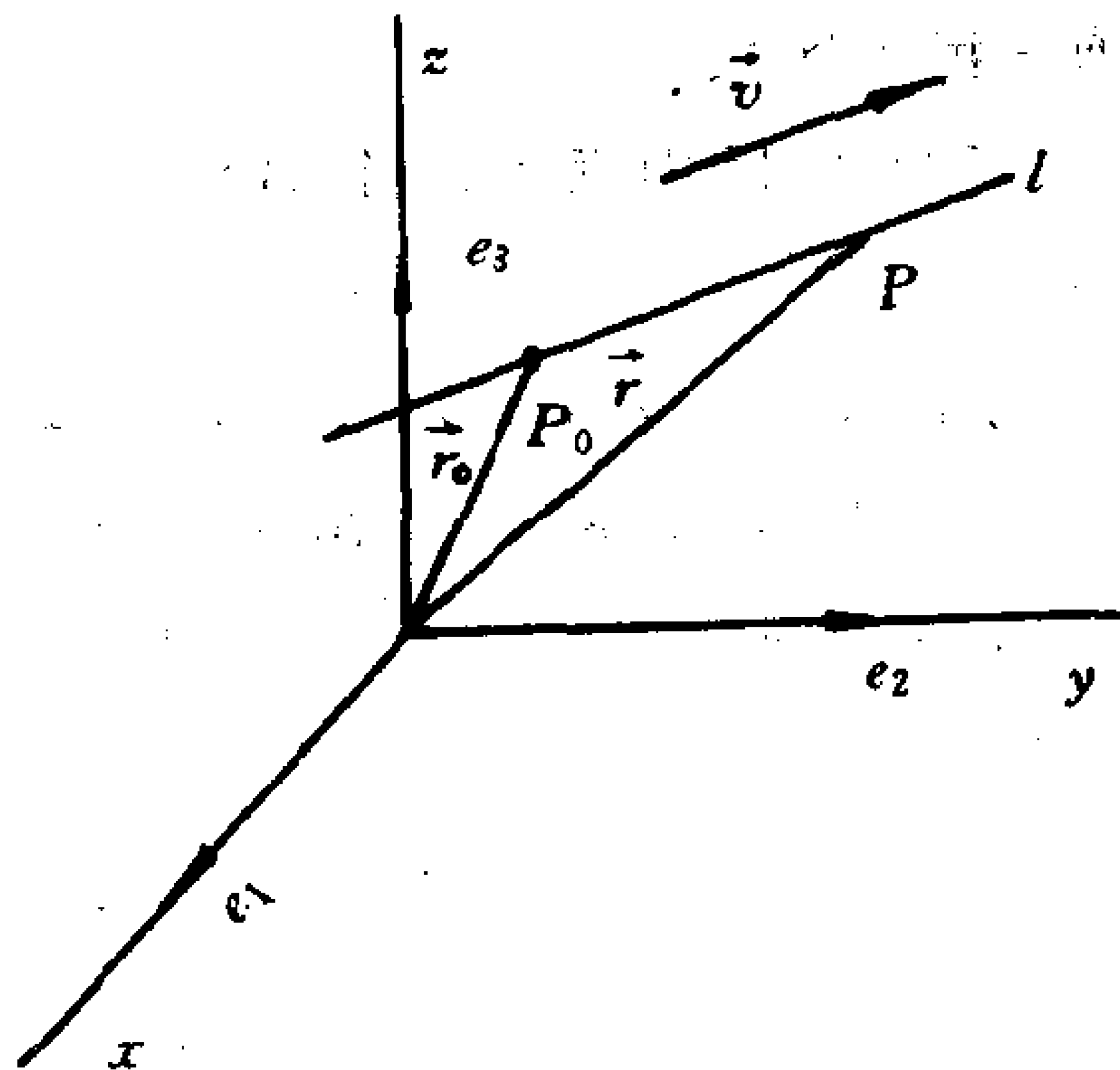


图 7—1

2. 参数方程

已知空间直线 l 上一点 p_0 和它的方向向量 $\vec{v}$，下面建立直线 l 的方程. 在空间标架 $\{O;e_1,e_2,e_3\}$，并设 P_0 的径向量为 $\overrightarrow{OP_0}=\vec{r_0}$，直线 l 上任一点 P 的径向量 $\overrightarrow{OP}=\vec{r}$（图7—1），显然 P 在直线 l 上的充要条件是 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\vec{v}$ 共线，也就是 $\overrightarrow{P_0P}$ $=t\vec{v}$

即 $\vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{v}$

所以 $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{v}$ (1)

(1)叫做直线 l 的向量式参数方程，其中 t 是参数.

若设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，$M(x,y,z)$ 则 $\vec{r_0}=(x_0,y_0,z_0)$，$\vec{r}=\{x,y,z\}$ 又设 $\vec{v}=\{x,y,z\}$，于是由(1)式可得

$$\begin{cases} x=x_0+xt \\ y=y_0+yt \\ z=z_0+zt \end{cases} \tag{2}$$

式(2)称为直线 l 的坐标式参数方程，其中 l 为参数，x，y，z 是直线 l 的方向数.

方程(1)和(2)对一般仿射坐标系都成立，在直角坐标系中，直线的方向向量常常取单位向量

$$\vec{v_0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

这时直线的参数方程为

$$\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{v_0} \tag{3}$$

或
$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\cos\beta \\ z=z_0+t\cos\gamma \end{cases} \tag{4}$$

这时(3)式中的参数t具有鲜明的几何定义，其绝对值恰好是直线l上的两点P_0与P间的距离，这是因为

$$|t|=|\vec{r}-\vec{r_0}|=|\overrightarrow{PP_0}|$$

而t本身表示有向线段$\overrightarrow{P_0P}$的值，当$\overrightarrow{P_0P}$与$\vec{v}_0$同向时，$t>0$；当$\overrightarrow{P_0P}$与$\vec{v}_0$异向时，$t<0$.

3. 对称方程

由(2)消去参数t，可得

$$\frac{x-x_0}{x}=\frac{y-y_0}{y}=\frac{z-z_0}{z} \tag{5}$$

(5)式称为直线l的对称式方程或标准方程.

在(5)式中，(x_0,y_0,z_0)为直线l上定点P_0的坐标，x、y、z是直线l的方向数，若某一分母为零，比如$z=0$，认为其分子也为零，$z-z_0=0$.

4. 两点式方程

已知直线l上两上定点$P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$则$\overrightarrow{P_1P_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$是直线$l$的一个方向向量，由(5)式可得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{6}$$

(6)式称为直线l的两点式方程

5. 一般方程

设有两个平面π_1和π_2的方程为

$$\pi_1: A_1x+B_1y+D_1=0$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+D_2=0$$

如果$A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$，那么$\pi_1$与$\pi_2$相交，它们的交线设为直线$l$，其方程可表示为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{7}$$

(7)式称为直线 l 的一般方程.

π_1的法向量 $\overrightarrow{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$，$\pi_2$的法向量$\overrightarrow{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$，$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$是直线 l 的一个方向向量.

6. 射影式方程

在直线 l 的一般方程(7)式中，若两个平面 π_1和 π_2分别垂直于两个坐标平面，如

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+D_2=0 \end{cases} \tag{8}$$

类似于(8)式的方程称为直线 l 射影式方程.

二、常用方法及应用举例

1. 求空间直线的方程

例1 已知直线l过点$P_0(3,1,-1)$且平行于向量$\overrightarrow{v}=\{4,7,-8\}$，求直线 l 的参数方程.

解 由于直线l过点$P_0(3,1,-1)$，其方向向量为$\overrightarrow{v_0}=\{4,7,-8\}$，由方程(2)得直线 l 的参数方程

$$\begin{cases} x=3+4t \\ y=1+7t \quad (t\text{ 为参数}) \\ z=-1-8t \end{cases}$$

例2 已知$\triangle P_1P_2P_3$的三个顶点的坐标分别为$P_1(3,-4,-5)$，$P_2(-1,12,3)$，$P_3(-5,4,-10)$，求这个三角形三条中线的方程.

解 设$\triangle P_1P_2P_3$的重心为 $M(x,y,z)$，则有

$$x=\frac{1}{3}(3-1-5)=-1$$

$$y=\frac{1}{3}(-4+12+4)=4$$

$$z=\frac{1}{3}(-5+3-10)=-4$$

即 $M(-1,4,-4)$.

由两点式方程(6)得$\triangle P_1P_2P_3$的三条中线 P_1M、P_2M、P_3M 的方程分别为

$$\frac{x-3}{-1-3}=\frac{y+4}{4+4}=\frac{z+5}{-4+5}$$

$$\frac{x+1}{-1+1}=\frac{y-12}{4-12}=\frac{z-3}{-4-3}$$

$$\frac{x+5}{-1+5}=\frac{y-4}{4-4}=\frac{z+10}{-4+10}$$

即

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y+4}{8}=\frac{z+5}{1}$$

$$\frac{x+1}{0}=\frac{y-12}{-8}=\frac{z-3}{-7}$$

$$\frac{x+5}{4}=\frac{y-4}{0}=\frac{z+10}{6}$$

评注 本例可先分别求 P_1P_2、P_2P_3、P_3P_1 的中点 M_1、M_2、M_3，再用两点式分别求 P_1M_2、P_2M_3、P_3M_1 的方程.

在直线对称方程中，出现分母为零，如$\frac{x+1}{0}$，$\frac{y-4}{0}$，不应理解为作除数，而应当看作 $x+1=0$，$y-4=0$.

2. 化直线的一般方程为其他形式方程

设直线 l 的方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\tag{1}$$

其中 $A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$.

由于(1)中三个子数行列式

$$\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\B_2 & C_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\C_2 & A_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\A_2 & C_2\end{vmatrix}$$

不全为零，不妨设

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

那么由(1)中的两式分别消 y 和 x 可得直线的射影式方程

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} z + \dfrac{\begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} z + \dfrac{\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \end{cases} \tag{2}$$

又由于$\{A_1,B_1,C_1\}\times\{A_2,B_2,C_2\}$为直线 l 的方向向量. 故只要在 l 上任取一点 $P(x_0,y_0,z_0)$. 也就是求方程组(1)的一个特解(x_0,y_0,z_0)，就可化(1)为标准方程和参数方程.

例3 化直线 l 的一般方程

$$\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

为射影方程，参数方程，对称方程.

解法一 因为 x,y 的系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$，因而可由原方程组分别消去 x 和 y，得直线 l 的射影方程为

$$\begin{cases} 3y - z + 7 = 0 \\ 3x + 2z - 5 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

在(2)中令 $z=t$，可得直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t \\ y = -\frac{7}{3} + \frac{1}{3}t \quad (t \text{ 为参数}) \\ z = t \end{cases} \tag{3}$$

由(3)知 $P_0(\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, 0)$ 为直线 l 上的一点，$\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$ 为直线 l 的方向向量，所以，得直线 l 的对称方程为

$$\frac{x-\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{y+\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{1}$$

解法二 因为直线 l 的方向数为

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2:1:3$$

再令 $x=0$ 解得 $y=-\frac{3}{2}$，$z=\frac{5}{2}$，于是 $(0, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ 为直线 l 上一点，所以直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -\frac{3}{2} + t \quad (t \text{ 为参数}) \\ z = \frac{5}{2} + 3t \end{cases}$$

对称式方程为

$$\frac{x}{-2} = \frac{y+\frac{3}{2}}{1} = \frac{z-\frac{5}{2}}{3}$$

由对称方程易得直线 l 的射影式方程为

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 2z = 5 \end{cases}$$

评注 解一、解二适用于一般仿射坐标系，若在直角坐标系中，可取$\{1,-1,1\}\times\{2,1,1\}$为直线$l$的方向向量.

将直线的一般方程化为其他形式方程，其结果可能不同，这主要是由于在直线上取的定点P_0和方向数不同所致.

例4 在直角坐标系中，直线l的方程为

$$\begin{cases}3x-2y-4z-4=0\\x+y-z+4=0\end{cases}$$

求直线l的对称方程和参数方程.

解 由已知直线l的方向向量为

$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{3,-2,-4\}\times\{1,1,-1\}=\{6,-1,5\}$

又由于$\begin{vmatrix}-2 & -4\\1 & -1\end{vmatrix}\neq 0$

因此令$x=0$，解方程组得$y=-\frac{10}{3}$，$z=\frac{2}{3}$，即点$(0,-\frac{10}{3},\frac{2}{3})$在直线$l$上，所以直线$l$的标准方程为

$$\frac{x}{6}=\frac{y+\frac{10}{3}}{-1}=\frac{z-\frac{2}{3}}{5}$$

参数方程为

$$\begin{cases}x=6t\\y=-\frac{10}{3}-t\\z=\frac{2}{3}+5t\end{cases}\quad(t\text{ 为参数})$$

3. 直线参数方程的应用

例5 已知直线l的方程为

$$\begin{cases}x=1+t\\y=-1-2t\\z=4+2t\end{cases}\quad(t\text{ 为参数})$$

直线l交曲面$x^2+y^2-z=0$于两点P_1和P_2求$P_0(1,-1,4)$到两点P_1和P_2距离之和与积.

解 直线l的方向向量$\vec{v}=\{1,-2,2\}$,于是有$\vec{v^0}=\{\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\}$,所以直线$l$的参数方程又可写为

$$\begin{cases} x=1+\frac{1}{3}t \\ y=-1-\frac{2}{3}t \quad (t\text{ 为参数}) \\ z=4+\frac{2}{3}t \end{cases} \tag{1}$$

将(1)代入曲面方程$x^2+y^2-z=0$得

$$(1+\frac{t}{3})^2+(-1-\frac{2}{3}t)^2-(4+\frac{2}{3}t)=0$$

即 $$5t^2+12t-18=0 \tag{2}$$

设t_1与t_2为方程(2)的两根,则$|t_1|$、$|t_2|$分别为$|P_0P_1|$和$|P_0P_2|$,由韦达定理

$$\begin{cases} t_1+t_2=-\frac{12}{5} \\ t_1t_2=-\frac{18}{5} \end{cases}$$

$\therefore t_1,t_2$异号

$$\therefore |P_0P_1||P_0P_2|=|t_1t_2|=\frac{18}{5}=3.6$$

$$|P_0P_1|+|P_0P_2|=\sqrt{(|P_0P_1|+|P_0P_2|)^2}$$

$$=\sqrt{|P_0P_1|^2+|P_0P_2|^2+2|P_0P_1||P_0P_2|}$$

$$=\sqrt{t_1{}^2+t_2{}^2+2|t_1||t_2|}$$

$$=\sqrt{(|t_1|-|t_2|)^2+4|t_1||t_2|}$$

$$=\sqrt{|t_1+t_2|^2+4|t_1||t_2|}$$

$$=\sqrt{(\frac{12}{5})^2+4\times\frac{18}{5}}$$

$$=\frac{6}{5}\sqrt{14}$$

所以，P_0到 P_1和 P_2距离之和与积分别为$\frac{6}{5}\sqrt{14}$，3.6.

评注 求直线与曲面的交点，直线用参数方程较简便，解答有关距离问题时，直线采用直角坐标系下参数方程，方向向量用单位向量，利用参数的几何定义，有利于问题解决，本例解答的关键之一，是判断 t_1、t_2异号，进而有$(t_1+t_2)^2=(|t_1|-|t_2|)^2$

例6 已知△ABC 的两个顶点 $A(1,3,5)$和 $B(-3,-1,7)$第三个顶点 C 在曲面 $x^2+y^2=2z$ 上运动，试求△ABC 的重心轨迹方程.

解 由已知得△ABC 的 AB 边的中点 $M(-1,1,6)$. 设△ABC 的重心为 $H(x',y',z')$，则 MH 的参数方程为

$$\begin{cases}x=-1+(x'+1)t\\ y=1+(y'-1)t \qquad (t\text{ 为参数})\\ z=6+(z'-6)t\end{cases}$$

点 H 对应 $t=1$.

MH 交曲面 $x^2+y^2=2z$ 于 C，则$\frac{|MC|}{|MH|}=3$所以 C 对应 $t=3$. 将方程

$$\begin{cases}x=-1+3(x'+1)\\ y=1+3(y'-1)\\ z=6+3(z'-6)\end{cases}$$

代入曲面方程 $x^2+y^2=2z$ 得

$$[-1+3(x'+1)]^2+[1+3(y'-1)^2]=2[6+3(z'-6)]$$

整理得 $9x'^2+9y'^2+12x'-12y'=6z'-32$

故△ABC 的重心轨迹方程为

$$9x^2+9y^2+12x-12y=6z-32$$

评注 本例还可用定比分点坐标公式解答.

例7 过定点 $M(3,4,5)$任作直线 l 的交曲面$3x^2+4y^2+2z^2=5$于 P、Q,求 PQ 中点的轨迹方程.

解 设 PQ 的中点为 $N(x',y',z')$,则直线 NH 的参数方程为:

$$\begin{cases} x=x'+(3-x')t \\ y=y'+(4-y')t \quad (t\text{ 为参数}) \\ z=z'+(5-z')t \end{cases}$$

将参数方程代入曲面$3x^2+4y^2+2z^2=5$,得

$3[x'+(3-x')t]^2+4[y'+(4-y')t]^2+2[z'+(5-z')t]^2=5.$

即$[3(3-x')^2+4(4-y')^2+2(5-z')^2]t'^2+[6x'(3-x')+8y'(4-y')+4z'(5-z')]t+3x'^2+4y'^2+2z'^2-5=0$

设此方程的两上根为 t_1,t_2,由于 P、Q 关于 N 对称,∴$t_1+t_2=0$,由韦达定理,

$$6x'(3-x')+8y'(4-y')+4z'(5-z')=0$$

即 $$3x'^2+4y'^2+2z'^2-9x'-16y'-10z'=0$$

所以,要求的轨迹方程为

$$3x^2+4y^2+2z^2-9x-16y-10z=0$$

且$3x^2+4y^2+2z^2\leqslant 5$.

例8 已知两个相交平面,由此两平面外的任一定点到这两平面作垂线,试证它们垂足的连线必和此两平面的交线垂

直.

证明 取已知二平面交线为 z 轴,建立坐标系,则两平面方程为 $y=mx$ 及 $y=nx$

设定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,自 P_0 作平面 $y=mx$ 的垂线:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{-1}=\frac{z-z_0}{0}$$

写作参数式

$$\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0-t \qquad\qquad (t\text{ 为参数})\\ z=z_0\end{cases}$$

代入 $y=mx$ 中,得 $y_0-t=m(x_0+mt)$

所以 $t=\dfrac{y_0-mx_0}{1+m^2}$

故垂足为 $\left(\dfrac{x_0+my_0}{1+m^2},\dfrac{mx_0+m^2y_0}{1+m^2},z_0\right)$

类似的得另一垂足为 $\left(\dfrac{x_0+ny_0}{1+n^2},\dfrac{nx_0+n^2y_0}{1+n^2},z_0\right)$.

两垂足连线的方向数是 $\dfrac{x_0+my_0}{1+m^2}-\dfrac{x_0+ny_0}{1+n^2},\dfrac{mx_0+m^2y_0}{1+m^2}-\dfrac{nx_0+n^2y_0}{1+n^2},0$.

显然此连线与 z 轴垂直.

另证,设两个平面的法线向量分别为 $\overrightarrow{n_1}\,\overrightarrow{n_2}$,则平面交线的方向向量为 $\vec{s}=\lambda(\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}),(\lambda\neq0)$

平面外一点 P_0,到两平面之垂足分别 P_1、P_2;则 $\overrightarrow{P_0P_1}=\mu\overrightarrow{n_1}$,$\overrightarrow{P_0P_2}=\nu\overrightarrow{n_2}\,(\mu,\nu\neq0)$ 而 $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{P_0P_2}-\overrightarrow{P_0P_1}=\nu\overrightarrow{n_2}-\mu\overrightarrow{n_1}$,于是有

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{s}=(\nu\vec{n}_2-\mu\vec{n}_1)\cdot[\lambda(\vec{n}_1\times\vec{n}_2)]=0,$$

故两垂足连线与两平面交线垂直.

例9 已知直线 l: $\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{s}$,及其上的一定点 P_1,

(1) 在 l 上求与 $P_0(\vec{r_0})$的距离为1的点;

(2) 在 l 上求 P_1关于 $P_0(\vec{r}_0)$的对称点.

解 (1) 将方向向量写作$|\vec{s_0}|\vec{s}$ ($\vec{s_0}$为 $\vec{s}$ 方向上的单位向量),于是直线方程为

$$\vec{r}=\vec{r_0}+t|\vec{s}|\vec{s_0}$$

令 $t'=|\vec{s}|t$,上式可写成

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t'\vec{s_0}$$

因为所求的点与 $P_0(\vec{r}^0)$距离为1,故令 $t'=\pm1$,则所求点的位置矢径为

$$\vec{r}=\vec{r_0}+\vec{s_0}\text{和}\ \vec{r}=\vec{r_0}-\vec{s_0}$$

(2) 点 P_1为直线上的点,故其矢径

$$\vec{r_1}=\vec{r_0}+t'\vec{s_0}$$

因此,$t'\vec{s_0}=\vec{r_1}-\vec{r_0}$

这里 t'是$\vec{r_1}$所对应的参数值,为求 t'可用$\vec{s_0}$与上式两边相乘,得

$$t'\vec{s_0}\cdot\vec{s_0}=(\vec{r_1}-\vec{r_0})\cdot\vec{s_0}$$

即有 $t'=(\vec{r_1}-\vec{r})_0\cdot\vec{s_0}$.

如果 P_1关于 P_0对称点记作 P_2,则 P_2的矢径对应参数值是$-t'$,$-((\vec{r_1}-\vec{r_0})\vec{s_0}$于是 P_2的位置矢径为

$$\vec{r_2}=\vec{r_0}-[(\vec{r_1}-\vec{r_0})\vec{s_0}]\vec{s_0}$$

习 题 7.1

1. 求下列各直线的方程：

(1) 平行于 $\vec{s}=\{1,2,3\}$且过点 $P_0(4,0,2)$的直线.

(2) 通过点 $A(-3,0,1)$和 $B(2,-5,1)$的直线；

(3) 通过点 $M(1,-5,3)$且与 x,y,z 三轴分别成角$\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}$的直线；

(4)一直线过点 $A(-2,2,1)$且与向量 $\vec{n}_1=\{-1,1,1\}$ $\vec{n}_2=\{1,0,-1\}$都垂直.

2. 化下列方程为对称式

(1) $\begin{cases}x+y+z=3\\3x-2y+5z=5\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=3z-5\\y=2z-8\end{cases}$

3. 化下列方程为参数方程和对称方程

(1) $\begin{cases}2x+3y-z-4=0\\3x-5y+2z-1=0\end{cases}$ (2) $\begin{cases}y=4\\z=3x+12\end{cases}$

4. 化下列方程为射影方程

(1) $\begin{cases}2x+y-z+1=0\\3x-y-2y-3=0\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x+y-z=0\\x=2\end{cases}$

5. 线段 AB 的一端点 $A(1,1,1)$，另一端点 B 在曲面 $x^2+y^2=z^2$上运动，P 为 AB 上一点，且$\frac{AP}{BP}=4$，求 P 点的轨迹方程；

6. 求直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z+3}{2}$与三坐标轴所成的角.

§7.2 直线与平面的相关位置

一、基本内容

1. 直线与平面的位置关系

设已知直线 l 的方程为

$$\begin{cases} x=x_0+xt \\ y=y_0+yt \\ z=z_0+zt \end{cases} \tag{1}$$

平面 π 的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

为研究它们的位置关系，将(1)式代入(2)式，整理得

$$(Ax+By+Cz)t+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0 \tag{3}$$

这是关于 t 的一次方程，它的解的情况决定着直线平面的位置关系.

(1) 当 $Ax+By+Cz\neq0$ 由(3)得 t 的唯一解，直线 l 与平面 π 有唯一交点，于是有

直线 l 与平面 π 相交的充分必要条件是

$$Ax+By+Cz\neq0 \tag{7.2—1}$$

即直线 l 的方向向量 $\vec{v}=\{x,y,z\}$ 和平面 π 的法线向量，$\vec{n}=\{A,B,C\}$ 不垂直

(2) 当 $Ax+By+Cz=0$，$Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0$ 时，方程(3)无解，即直线 l 和平面 π 平行，于是有

直线 l 与平面 π 平行的充分心要条件是

$$Ax+By+Cz=0 \quad Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0 \tag{7.2—2}$$

即　直线 l 的方向向量 $\vec{v}=\{x,y,z\}$ 和平面 π 的法线向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$ 垂直，而点 $p_0(x_0,y_0,z_0)$ 不在平面 π 上.

(3) 当 $Ax+By+Cz=0$，$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ 时，任意 $t\in R$ 均为(3)的解，即直线 l 的所有点都在平面 π 上，于是有

直线 l 在平面 π 上的充分必要条件是

$$Ax+By+Cz=0,Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \tag{7.2—3}$$

即　直线 l 的方向向量 $\vec{v}=\{x,y,z\}$ 和平面的法线向量 $\vec{n}=$

$\{A,B,C\}$垂直，且点$\{x_0,y_0,z_0\}$在平面 π 上.

2. 直线与平面的交角

(1)若直线 l 不垂直于平面 π，过直线 l 作平面 π' 垂直于平面 π，与 π 相交于直线 l'，l' 称为直线 l 在一平面 π 上的射影，把 l 和 l' 交成的锐角称为直线 l 与平面 π 的交角，记作 θ，若直线 l 垂直平面 π，直线 l 与平面 π 的夹角为直角.

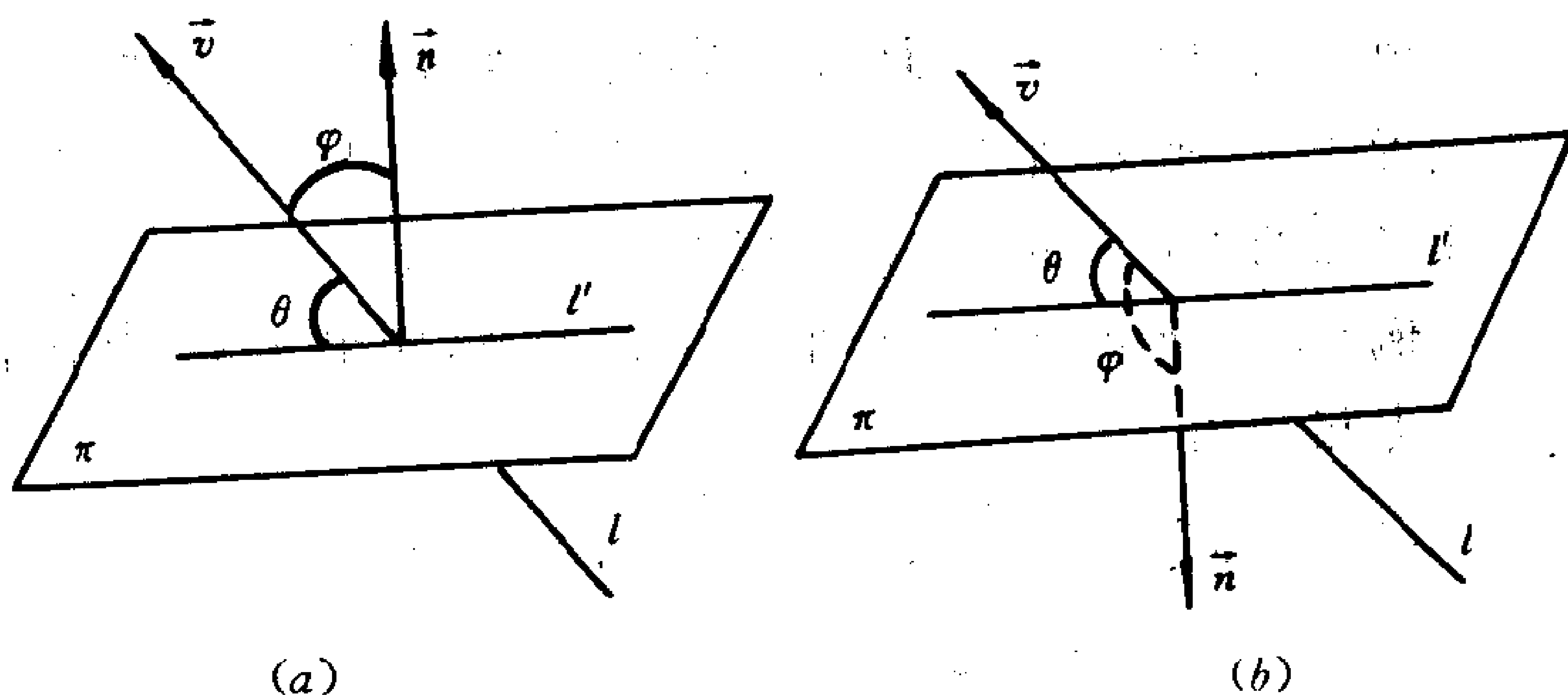


图 7—2

(2) 如图7—2，设直线 l 的方向向量 $\vec{v}=\{x,y,z\}$平面 π 的法线向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$，并设 φ 为向量 $\vec{v}$ 和 $\vec{n}$ 的夹角，则有 $\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta$ 或 $\varphi=\frac{\pi}{2}+\theta$.

所以 $\cos\varphi=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ 或 $\cos\varphi=\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$

由于$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\theta\geqslant0$

故 $\sin\theta=|\cos\varphi|$.

由两向量夹角的计算公式知

$$\cos\varphi=\frac{\vec{v}\,\vec{n}}{|\vec{v}||\vec{n}|}=\frac{Ax+By+Cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

所以

$$\sin\theta=\frac{|Ax+By+Cz|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{7.2—4}$$

(3) 直线 l 与平面 π 垂直的充分必要条件是直线 l 的方向向量 $\vec{v}$ 和平面 π 的法线向量 $\vec{n}$ 共线，即 $A:B:C=x:y:z$.

二、常用方法及应用举例

1. 判断直线和平面的关系

根据所给直线和平面的方程，可以直接判定直线和平面的位置关系，相交、平行、或直线在平面上，也可以直接求出直线和平面的度量关系，交点和交角.

例1 判断下列直线与平面位置关系，如果相交，求它们的交点和交角.

(1) 直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ 与平面 $4x+3y-z+3=0$；

(2) 直线 $\begin{cases}x=1-2t\\ y=2-4t\\ z=-1+5t\end{cases}$ 与平面 $x+2y+2z-7=0$；

(3) 直线 $\begin{cases}x-y+z-5=0\\ x+y-z+1=0\end{cases}$ 与平面 $2x+y+z-5=0$.

解 (1) $\vec{v}=\{2,-1,5\}$，$\vec{n}=\{4,3,-1\}$，$P_0(1,-3,-2)$ 由于 $\vec{v}\cdot\vec{n}=2\times4-1\times3-5\times1=0$，将点 $P_0(1,-3,-2)$ 的坐标代入平面方程 $4x+3y-z+3=0$，有 $4\times1+3\times(-3)-(-2)+3=0$，即点 $P_0(4,-3,-2)$ 在平面上，所以，直线在平面内.

(2) $\vec{v}=\{-2,-4,5\}$，$\vec{n}=\{1,2,2\}$，$P_0(1,2,-1)$. 由于 $\vec{v}\cdot\vec{n}=-2\times1-4\times2+5\times2=0$，将点 $P_0(1,2,-1)$ 的坐标

代入平面方程 $x+2y+2z-7=0$的左端，$1+2\times2+2\times(-1)-7\neq0$，即点 P_0不在平面上，所以，直线与平面平行.

(3) $\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{1,-1,1\}\times\{1,1,-1\}=\{0,2,2\}$，$\vec{n}=\{2,1,1\}$，$\vec{v}\cdot\vec{n}=0\times2+2\times1+2\times1\neq0$，故直线和平面相交

解方程组$\begin{cases}x-y+z-5=0\\x+y-z+1=0\\2x+y+z-5=0\end{cases}$

得 $x=2,y=-1,z=2$，即直线与平面的交点为$P(2,-1,2)$

$$\sin\theta=\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}=\frac{0\times2+2\times1+2\times1}{\sqrt{0^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

故 $\theta=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}=35°16'$.

评注 (3)还可直接根据三平面的关系判断，因为三阶行列式

$$\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=4\neq0$$

说明三平面 $x-y+z-5=0$，$x+y-z+7=0$，$2x+y+z-5=0$共点，即直线$\begin{cases}x-y+z-5=0\\x+y-z+1=0\end{cases}$与平面$2x+y-z-5=0$相交.

2. 求直线或平面的方程

由已知的直线和平面的关系，可创造条件求出直线或平面的方程.

例2 求通过点 $A(3,-1,1)$且垂直于平面 $x+y+z=1$

的直线方程.

解 设直线的方向向量为 $\vec{v}=\{x,y,z\}$，由于直线和平面 $x+y+z=1$ 垂直，故 $\vec{v}$ 和 $\vec{n}=\{1,1,1\}$ 共线，即 $\vec{v}=\lambda\vec{n}$ $(\lambda\neq0)$，所以 $\vec{n}=\{1,1,1\}$ 可以看作直线的方向向量，又直线过点 $A(3,-1,1)$. 因此要求的直线方程为

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$$

即 $\qquad x-3=y+1=z-1.$

例3 求过点 $A(1,1,1)$ 且过直线

$$\begin{cases}x+y+z-1=0\\x-y+z+3=0\end{cases}$$

的平面方程.

分析 因为平面过直线 $\begin{cases}x+y+z-1=0\\x-y+z+3=0\end{cases}$ 因而直线的方向向量 $\vec{v}=\{1,1,1\}\times\{1,-1,1\}=\{2,0,2\}$ 平行于平面. 令 $x=0$，得直线一点 $P(0,2,-1)$ 在平面上. 又平面过 $A(1,1,1)$，所以，平面的方位矢量为 $\{-2,0,2\}$，$\{1,-1,2\}$，由平面的点位式方程即可求其方程.

解 令 $x=0$，得直线上一点 $P(0,2,-1)$，此点也在平面上，又直线的方向向量 $\vec{v}=\{1,1,1\}\times\{1,-1,1\}=\{2,0,2\}$，平行于平面，点 $A(1,1,1)$ 在平面上，故平面的方位向量是 $\{-2,0,2\}$，$\{1,-1,2\}$. 由平面的点位式方程得

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 2 & 0 & 2\\ +1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0$$

即 $\qquad x-y-z+1=0.$

评注 本例用平面束求解更简便.

3. 求关于平面的对称图形

例4 求点 $P(x_0,y_0,z_0)$，在平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上投影，并求 P 点关于此平面的对称点.

解 设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 在平面上的射影为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$.

由直线 PP_1 垂直于平面 $Ax+By+Cz+D=0$，所以有

$$\begin{cases} \dfrac{x_1-x_0}{A}=\dfrac{y_1-y_0}{B}=\dfrac{z_1-z_0}{C} & (1) \\ Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 & (2) \end{cases}$$

由(1)得

$$\frac{(Ax_1+By_1+Cz_1)-(Ax_0+By_0+Cz_0)}{A^2+B^2+C^2}=\frac{x_1-x_0}{A}=\frac{y_1-y_0}{B}=\frac{z_1-z_0}{C} \quad (3)$$

将(2)代入(3)得

$$\frac{x_1-x_0}{A}=\frac{y_1-y_0}{B}=\frac{z_1-z_0}{C}=-\frac{(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1=x_0-\dfrac{A(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2} \\ y_1=y_0-\dfrac{B(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2} \\ z_1=z_0-\dfrac{C(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2} \end{cases}$$

设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 关于平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的对称点为 $P_2(x_2,y_2,z_2)$，由中点坐标公式

$$x_2=2x_1-x_0=x_0-\frac{2A(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}$$

$$y_2=2y_1-y_0=y_0-\frac{2B(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}$$

$$z_2=2z_1-z_0=z_0-\frac{2C(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}$$

例5 已知直线 l：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}$ 和平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$，求直线 l 在平面 π 上的射影，并求直线 l 关于平面 π 的对称图形.

解 若直线 l 不垂直于平面 π，过直线 l 作平面 π 垂直于平面 π，由平面 π' 过点 (x_0,y_0,z_0) 方位向量为 $\vec{v_1}=\{m,n,l\}$，$\vec{v_2}=\{A,B,C\}$，得其方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m & n & l \\ A & B & C \end{vmatrix}=0$$

令

$$A'=\begin{vmatrix} n & l \\ B & C \end{vmatrix} \qquad B'=\begin{vmatrix} l & m \\ C & A \end{vmatrix}$$

$$C'=\begin{vmatrix} m & n \\ A & B \end{vmatrix} \qquad D'=-A'x_0-B'y_0-C'z_0$$

得平面 π 的一般方程为

$$A'x_0+B'y+C'z+D'=0$$

故直线 l 在平面内的射影的一般方程为

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x_0+B'y_0+C'z+D'=0 \end{cases}$$

设 $P(x,y,z)$ 为直线 l 关于平面 π 对称图上任一点，由例4，$P(x,y,z)$ 关于平面的对称点是

$$P'\left(x-\frac{2A(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2},\right.$$

$$\left.y-\frac{2B(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2},z-\frac{2C(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2}\right)$$

显然 P' 在直线 l 上. 故直线 l 关于平面 π 对称图形的方程为

$$\frac{x-\frac{2A(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2}-x_0}{m}=\frac{y-\frac{2B(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2}-y_0}{n}$$

$$=\frac{z-\frac{2C(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2}-z_0}{l}$$

化简整理得

$$\frac{m(y-y_0)-n(x-x_0)}{nA-mB}=\frac{n(z-z_0)-l(y-y_0)}{lB-nC}$$

$$=\frac{l(x-x_0)-m(z-z_0)}{mC-lA}$$

即 $$\frac{m(y-y_0)-n(x-x_0)}{mB-nA}=\frac{n(z-z_0)-l(y-y_0)}{nC-lB}$$

$$=\frac{l(x-x_0)-m(z-z_0)}{lA-mC}$$

例6 求平面 $\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$关于平面 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$的对称平面.

解 设 $P(x,y,z)$是平面 π_1关于平面 π 的对称平面上的任一点，$P(x,y,z)$关于平面 π 的对称点为 $P'(x-\frac{2A(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2}, y-\frac{2B(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2}, z-\frac{2C(Ax+By+Cz)}{A^2+B^2+C^2})$，显然点 P'在平面 π_1上.

故求的平面方程为

$$A_1(x-\frac{2A(Ax+By+Cz)}{A^2+B^2+C^2})+B_1(y-\frac{2B(Ax+By+Cz)}{A^2+B^2+C^2})$$
$$+C_1(z-\frac{2C(Ax+By+Cz)}{A^2+B^2+C^2})+D_1=0$$

即 $(A^2+B^2+C^2)(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)-2(AA_1+BB_1+CC_1)\cdot(Ax+By+Cz+D)=0$

由此方程可以看出，当平面 $\pi_1\perp\pi$ 时，其关于 π 的对称平面仍为 $\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$.

评注 一般来说，曲面 $F(x,y,z)=0$ 关于平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的对称曲面方程为

$$F\left(x-\frac{2A(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2},\ y-\frac{2B(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2},\ z-\frac{2C(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2}\right)=0$$

而曲线 $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}$ 关于平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 对称的曲线方程为

$$\begin{cases}F_1\left(x-\dfrac{2A(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2},\ y-\dfrac{2B(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2},\ z-\dfrac{2C(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2}\right)=0\\ F_2\left(x-\dfrac{2A(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2},\ y-\dfrac{2B(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2},\ z-\dfrac{2C(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2}\right)=0\end{cases}$$

4. 求点的轨迹方程

例7 已知动直线过点 $S(1,1,1)$ 并且和平面 $x+y-z-1=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，求动直线所产生的曲面方程.

解 设动直线上任一点 $P(x,y,z)$，则直线 SP 的方向向量 $\{x-1,y-1,z-1\}$，又 SP 与平面 $x+y-z-1=0$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角，

故 $\dfrac{|(x-1)+(y-1)-(z-1)|}{\sqrt{1^2+1^2(-1)^2}\ \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}}=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$4(x+y-z-1)^2=6[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2]$$

即 $x^2+y^2+z^2-4xy+4yz+4zx-10x-10y-2z+7=0$

习 题 7.2

1. 判断下列直线和平面的位置关系，相交时，求出交点和交角.

(1) 直线：$\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$和平面：$x+2y-4z+1=0$；

(2) 直线：$\begin{cases}6x+2y+12z-3=0\\5x-7z-10=0\end{cases}$和平面：$3x+y+6z+12=0$；

(3) 直线：$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$和平面$2x+y-z-3=0$.

2. 确定 a,b 的值，使直线$\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{a}=\frac{z-6}{2}$与平面：$6x+2y+3z+1=0$. (1)相交，(2)平行，(3)在平面上.

3. 求点 $P(5,2,-1)$在平面$2x-y+2z+23=0$上的射影 P_0及 P 关于平面的对称点 P_1的坐标.

4. 求曲面 $x+(y-2)^2+z^2=4$关于平面：$x+y+z=1$的对称曲面的方程.

§7.3 空间二直线、点与直线的相关位置

一、基本内容

1. 空间二直线的位置关系

空间二直线的位置关系有异面与共面两种，在共面中又有相交、平行与重合三种情况，下面导出这些位置关系成立的条件.

设直线 l_1过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，方向向量为$\overrightarrow{v_1}=\{x_1,y_1,z_1\}$，直线 l_2过点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，方向向量为$\overrightarrow{v_2}=\{x_2,y_2,z_2\}$，它们的方程为：

$$l_1:\frac{x-x_1}{x_1}=\frac{y-y_1}{y_1}=\frac{z-z_1}{z_1} \tag{1}$$

$$l_2:\frac{x-x_2}{x_2}=\frac{y-y_2}{y_2}=\frac{z-z_2}{z_2} \tag{2}$$

由图7—3易看出，二直线 l_1 与 l_2 的位置关系决定于三矢量 $\overrightarrow{v_1}=\{x_1, y_1, z_1\}$ $\overrightarrow{v_2}=\{x_2, y_2, z_2\}$ 和 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ 的相互关系，具体讲，l_1 与 l_2 异面的充要条件是 $\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ 和 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 异面；l_1 与 l_2 共面的充要条件是 $\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ 和 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 共面；在共面的情况下，l_1 与 l_2 相交的充要条件 $\overrightarrow{v_1}$ 与 $\overrightarrow{v_2}$ 不共线；l_1 与 l_2 平行的充要条件是 $\overrightarrow{v_1}$ 与 $\overrightarrow{v_2}$ 共线，但 $\overrightarrow{v_1}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 不共线，l_1 与 l_2 重合的充要条件是 $\overrightarrow{v_1}$、$\overrightarrow{v_2}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 共线，于是有下列结论：

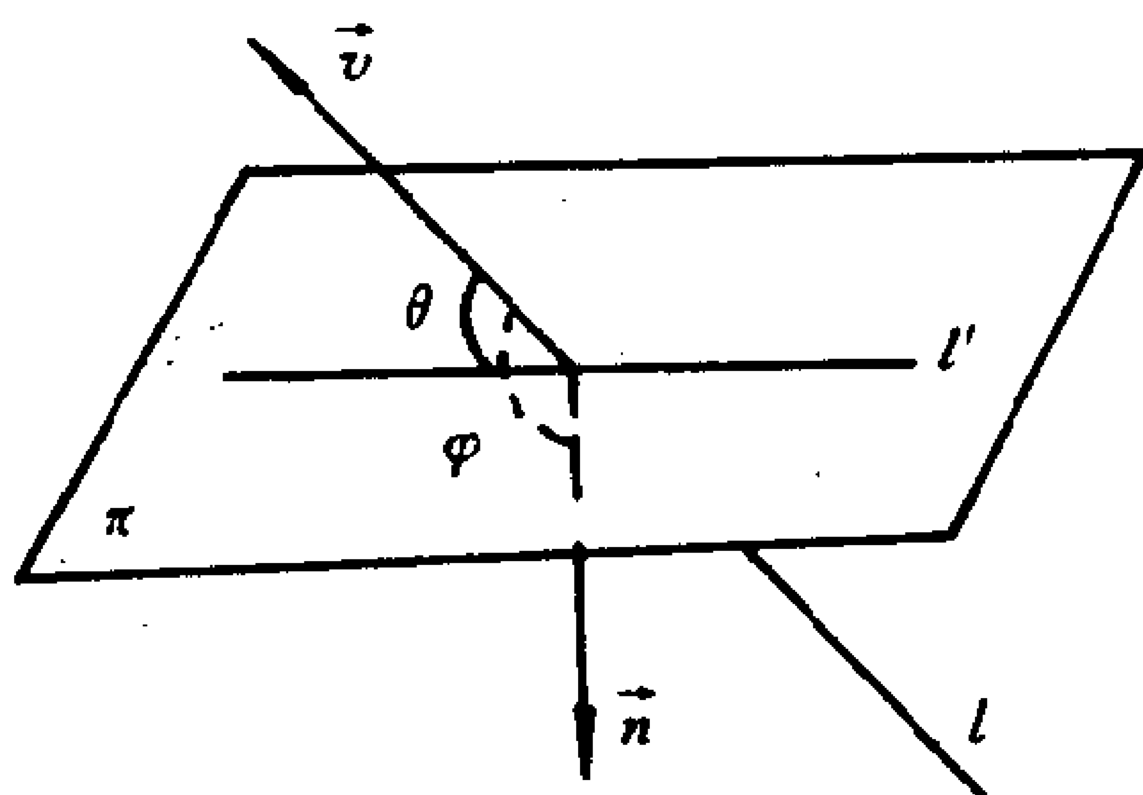


图 7—3

（1）l_1 与 l_2 异面：

$$\Delta=(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})=\begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7.3—1}$$

（2）l_1 与 l_2 共面：$\Delta=0$　　（7.3—2）

① l_1 与 l_2 相交：$\Delta=0, x_1:y_1:z_1 \neq x_2:y_2:z_2$　　（7.3—3）

② l_1 与 l_2 平行：$x_1:y_1:z_1=x_2:y_2:z_2$

$\neq(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$　　（7.3—4）

③ l_1 与 l_2 重合

$$x_1:y_1:z_1=x_2:y_2:z_2=(x_1-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1) \tag{7.3—5}$$

2. 空间二直线的夹角

平行于空间二直线的二向量间的角叫做空间二直线的夹角，直线 l_1 与 l_2 的夹角是

$\angle(l_1,l_2)=\angle(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$或$\angle(l_1,l_2)=\pi-\angle(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$，一般取$0\leqslant\angle(l_1,l_2)\leqslant\frac{\pi}{2}$.

于是有

$$\cos\angle(l_1,l_2)=\frac{|x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \quad (7.3\text{—}6)$$

由此可得l_1，与l_2垂直的充要条件是$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

3. 二异面直线的公垂线

直线l_1与l_2异面，令

$$\vec{v}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}.$$
$$=\{x,y,z\}$$

过l_1作平面π_1与$\vec{v}$平行，其方程为

$$\pi_1:\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \end{vmatrix}=0$$

过l_2作平面π_2与$\vec{v}$平行，其方程为

$$\pi_2:\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{vmatrix}=0$$

由l_1与l_2异面，可证π_1与π_2相交，设交线为d，其方程为

$$
d:\begin{cases}\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{vmatrix}=0 \end{cases} \qquad (7.3—7)
$$

可证直线 d 既与直线 l_1、l_2 都相交，又都垂直，即直线 d 是 l_1、l_2 的公垂线.

还可以证明直线 l_1、l_2 的公垂线的唯一性（杨大淳，《解析几何》，北京师范学院出版社，1987年，P257）.

4. 异面直线间的距离

在异面直线的公垂线上，介于二异面直线的交点间的线段长称为异面直线间的距离，在图7—4中线段 D_1D_2 的长就是异面直线 l_1、l_2 间的距离.

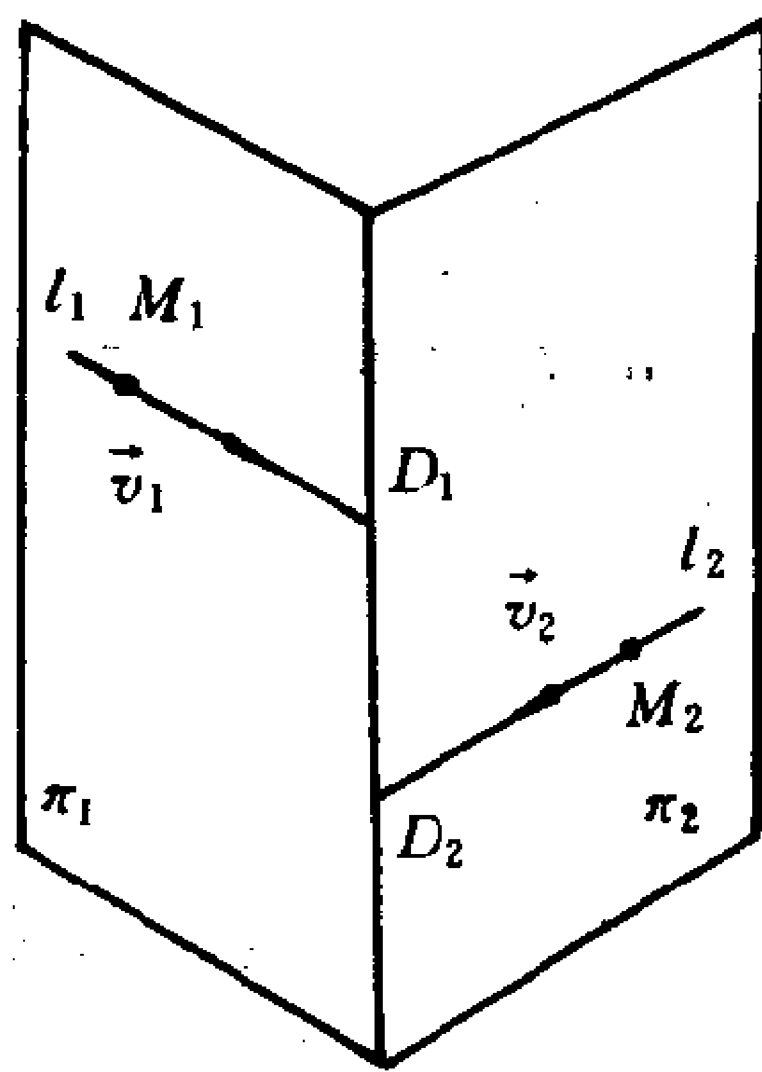


图7—4

由于直线 l_1 与 d 垂直相交 D_1，所以 M_1 在直线 d 上的射影为 D_1，同理，M_2 在直线上 d 上的射影为 D_2，所以 $\overrightarrow{D_1D_2}$ 构成向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在直线 d 上的射影向量.

取单位向量

$$
\vec{v}_0=\frac{\vec{v}_1\times\vec{v}_2}{|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}
$$

就有

$$d=|\overrightarrow{D_1D_2}|=|\overrightarrow{v_0}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|=\left|\frac{\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}|}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\frac{1}{|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}|}|(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})| \quad (7.3\text{—}8)$$

用坐标表示为

$$d=\frac{\left\|\begin{matrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}}. \quad (7.3\text{—}9)$$

5. 点到直线的距离

已知点 $P(x_0,y_0,z_0)$和直线 l:

$$\frac{x-x_1}{x}=\frac{y-y_1}{y}=\frac{z-z_1}{z}$$

为了求点 M_0到直线 l 的距离 d,连接点 M_0 和 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 得向量 $\overrightarrow{M_1M_0}$(图7—5). 直线 l 的方向向量 $\vec{v}=\{x,y,z\}$,则$|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{v}|$表示$\overrightarrow{M_1M_2}$和 $\vec{v}$ 为边的平行四边形的面积,由图7—5可看出,点 M_0到直线 l 的距离 d 就是这个平行四边形对于底边$|\vec{v}|$的高,因此

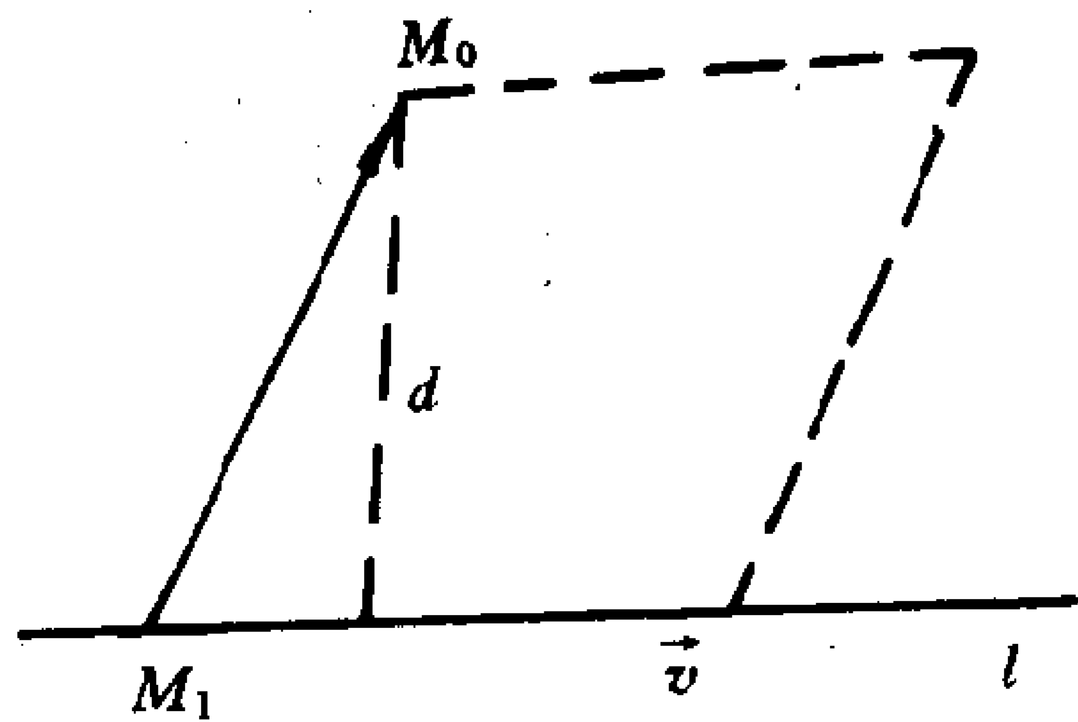


图7—5

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|} \quad (7.3\text{—}10)$$

用坐标值表示为

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ y & z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ z & x \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ x & y \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{7.3—11}$$

二、常用方法及应用举例

1. 求二直线的关系

根据二直线的方程，可以判断它们的位置关系，求它们间的角，对于相交直线又可求它们的交点.

例1 判断下列每对直线的位置关系，并求它们间的角，若相交求它们的交点.

(1) $l_1:\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$,

$l_2:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+1}{2}$;

(2) $l_1:\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$,

$l_2:\dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y+3}{10}=\dfrac{z}{7}$;

(3) $l_1:\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$,

$l_2:\dfrac{x-2}{-1\frac{1}{5}}=\dfrac{y-7}{\frac{2}{5}}=\dfrac{z-2}{\frac{-1}{5}}$;

(4) $l_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{1}$,

$l_2:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{8}=\dfrac{z-1}{2}$.

解 (1) $\overrightarrow{M_1M_2}=\{6,-4,-2\}$，$\vec{v}_1=\{4,2,3\}$，$\vec{v}_2=\{1,$

3,2}

$$\Delta=\begin{vmatrix}6 & -4 & -2\\4 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{vmatrix}=-30\neq 0$$

故直线 l_1、l_2异面.

$$\cos\angle(l_1,l_2)=\frac{4\times 1+2\times 3+3\times 2}{\sqrt{4^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+2^2}}=\frac{8\sqrt{406}}{203}$$

$$\angle(l_1,l_2)=\arccos\frac{8\sqrt{406}}{203}\doteq 37°26'.$$

(2) $\overrightarrow{M_1M_1}=\{-1,-4,-2\}$, $\overrightarrow{v}_1=\{4,2,3\}$, $\overrightarrow{v}_2=\{6,10,7\}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & -4 & -2\\4 & 2 & 3\\6 & 10 & 7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\6 & 10 & 7\\6 & 10 & 7\end{vmatrix}=0$$

又4:2:3≠6:10:7即$\overrightarrow{v_1}$不平行于$\overrightarrow{v_2}$,故直线l_1,l_2相交.

$$\cos\angle(l_1,l_2)=\frac{4\times 6+2\times 10+3\times 7}{\sqrt{4^2+2^2+3^2}\sqrt{6^2+10^2+7^2}}=\frac{13\sqrt{5365}}{1073}$$

$$\angle(l_1,l_2)\arccos\frac{13\sqrt{5365}}{1073}\doteq 27°27'$$

将 l_1、l_2的方程改写为参数方程

$$l_1:\begin{cases}x=-1+4t_1\\y=1+2t_1\\z=2+3t_1\end{cases}\qquad l_2:\begin{cases}x=-2+6t_2\\y=-3+10t_2\\z=7t_2\end{cases}$$

解方程组

$$\begin{cases}-1+4t_1=-2+6t_2\\1+2t_1=-3+10t_2\\2+3t_1=7t_2\end{cases}$$

得 $t_1=t_2=\frac{1}{2}$，即 $x=1,y=2,z=3\frac{1}{2}$，故 l_1、l_2的交点坐标为 $(1,2,3\frac{1}{2})$.

(3) $\overrightarrow{M_1M_2}=\{3,3,0\}$，$\vec{v}_1=\{6,-2,1\}$，$\vec{v}_2=\{-1\frac{1}{5},\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\}$

$\because 6:(-2):1=-1\frac{1}{5}:\frac{2}{5}:(\frac{-1}{5})\neq 3:3:0$

即 $\vec{v_1}\parallel\vec{v_2}$ 且不平行于 $\overrightarrow{M_1M_2}$

故 $l_1\parallel l_2$，相向的角为0.

(4) $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,4,1\}$，$\vec{v_1}=\{2,4,1\}$ $\vec{v_2}=\{4,8,2\}$

$\because\quad 2:4:1=4:8:2=2:4:1$

$\therefore\quad \vec{v_1}\parallel\vec{v_2}\parallel\overrightarrow{M_1M_2}$

故 l_1、l_2重合.

评注 1° 判断二直线平行和重合，一般不用计算行列式 Δ 的值，直接由 $\vec{v_1}\parallel\vec{v_2}$ 且不平行于 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $\vec{v_1}\parallel\vec{v_2}\parallel\overrightarrow{M_1M_2}$ 来判断.

2° 当二直线相交时，求交点时，将直线方程改为参数方程较为简单些.

2. 求距离

例2 已知点 $A(3,2,-1)$和直线 l 的方程

$$\begin{cases}x+y+z-4=0\\2x-y-z+1=0\end{cases}$$

求点 A 到直线 l 的距离.

解 令 $z=1$ 由直线方程得 $x=1,y=2$，即 $M(1,2,1)$为直线 l 上的一点.

$$v=k\{1,1,1\}\times\{2,-1,-1\}=\{0,-3k,-3k\}$$

令 $k=\dfrac{1}{3}$，$v=\{0,1,1\}$，故由(7.3—10)式，点 A 到直线 l 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|}$$

$$=\frac{|\{-2,0,2\}\times\{0,1,1\}|}{|\{0,1,1\}|}=\frac{|\{-2,2,-2\}|}{|\{0,1,1\}|}=\sqrt{6}$$

评注 在具体计算点到直线的距离时，用式(7.3—10)，因为这个式子较式(7.3—11)有利于理解记忆.

例3 试证直线

$$l_1:\begin{cases}x=3+2t_1\\y=t_1\\z=1\end{cases}\qquad l_2:\begin{cases}x=-1+t_2\\y=2\\z=t_2\end{cases}$$

(其中 t_1、t_2 为参数)是异面直线，并求它们的公垂线和二直线间的距离.

证明 $M_1=(3,0,+1)$，$M_2=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-4,2,-1\}$，$\overrightarrow{v_1}=\{2,1,0\}$，$\overrightarrow{v_2}=\{1,0,1\}$

因为 $$\Delta=\begin{vmatrix}-4&2&-1\\2&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=-7\neq0$$

所以，直线 l_1、l_2 异面. $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=\{2,1,0\}\times\{1,0,1\}=\{1,-2,-1\}$.

由式(7.3—7)可求平面 π_1、π_2 的方程分别为

$$\begin{vmatrix}x-3&y&z-1\\2&1&0\\1&-2&-1\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}x+1&y=2&z\\1&0&1\\1&-2&-1\end{vmatrix}=0$$

故公垂线方程为

$$\begin{cases} x-2y+5z-8=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$$

异面直线 l_1、l_2间的距离

$$d=\frac{|\triangle|}{|v|}=\frac{|-7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{|-7|}{\sqrt{6}}=\frac{7}{6}\sqrt{6}.$$

3. 求关于直线的对称图形

例4 已知点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，直线 l：$\frac{x-a}{X}=\frac{y-b}{Y}=\frac{z-c}{Z}$，求点 P_0在直线 l 上的射影 P_1和其关于直线 l 的对称点 P_2的坐标.

解 设点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$在直线 l 上的射影为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，则 $P_1(x_1,y_1,z_1)$在直线 l 上，直线 P_0P_1垂直于直线 l，故有

$$\begin{cases} X(x_1-x_0)+Y(y_1-y_0)+Z(z_1-z_0)=0 & (1) \\ \frac{x_1-a}{Z}=\frac{y_1-b}{Y}=\frac{z_1-c}{Z} & (2) \end{cases}$$

由(1)$Xx_1+Yy_1+Zz_1=Xx_0+Yy_0+Zz_0$

由(2)用等比定理，得

$$\frac{x_1-a}{X}=\frac{y_1-b}{Y}=\frac{z_1-c}{Z}=\frac{X(x_1-a)+Y(y_1-b)+Z(z_1-c)}{X^2+Y^2+Z^2}$$

即$\frac{x_1-a}{X}=\frac{y_1-b}{Y}=\frac{z_1-c}{Z}=\frac{x(x_0-a)+y(y_0-b)+z(z_0-c)}{X^2+Y^2+Z^2}$

所以 $x_1=a+\frac{X[X(x_0-a)+Y(y_0-b)+Z(z_0-c)]}{X^2+Y^2+Z^2}$

$$y_1=b+\frac{Y[X(x_0-a)+Y(y_0-b)+Z(z_0-c)]}{X^2+Y^2+Z^2},$$

$$z_1=c+\frac{Z[X(x_0-a)+Y(y_0-b)+Z(z_0-c)]}{X^2+Y^2+Z^2}$$

令 $d=\dfrac{X(x_0-a)+Y(y_0-b)+Z(z_0-c)}{X^2+Y^2+Z^2}$

得 $x_1=a+Xd, y_1=b+Yd, z_1=c+Zd$,

故 $P_1(a+Xd, b+Yd, C+Zd)$.

再设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$关于直线 l 的对称点为. $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 由中点坐标公式,可得

$$x_2=2x_1-x_0=2a+2Xd-x_0$$
$$y_2=2y_1-y_0=2b+2Yd-y_0$$
$$z_2=2z_1-z_0=2c+2Zd-z_0$$

故 $P_2(2a+2Xd-x_0, 2b+2Yd-Y_0, 2c+2Zd-z_0)$.

评注 由已知点的坐标和直线的方程,可以求点在直线上的射影和其关于直线的对称点的坐标. 以此为基础,可以求平面、直线关于空间直线的对称平面、对称直线的方程.

例5 已知直线 $l_0: \dfrac{x-x_0}{X_0}=\dfrac{x-y_0}{Y_0}=\dfrac{z-z_0}{Z_0}; l: \dfrac{x-a}{X}=\dfrac{y-b}{Y}=\dfrac{z-c}{Z}$,求直线 l_0关于直线 l 对称的直线方程.

解 设 $P'(x,y,z)$是直线关于直线 l_0对称的直线 l'_0上任一点. 由例4,$P'(x,y,z)$关于直线的对称点 $P(2a+2Xd-x, 2b+2Yd-y, 2c+2Zd-z)$在直线 l_0上,于是有

$$\frac{2a+2Xd-x-x_0}{X_0}=\frac{2b+2Yd-y-y_0}{Y_0}=\frac{2c+2Zd-z-z_0}{Z_0}$$

化简整理得

$$\frac{X_0(y+y_0-2b)-Y_0(x+x_0-2a)}{2XY_0-2YX_0}=\frac{Y_0(z+z_0-2c)-Z_0(y+y_0-2b)}{2YZ_0-2ZY_0}$$
$$=\frac{Z_0(x+x_0-2a)-X_0(z+z_0-2c)}{2ZX_0-2XZ_0}$$

这就是要求的直线方程,此方程具有良好的对称性质,但它不是直线的对称方程.

例6 已知平面 π：$Ax+By+Cz=0$，直线 l：$\dfrac{x-a}{X}=\dfrac{y-b}{Y}=\dfrac{z-c}{Z}$，求平面 π 关于直线 l 的对称平面的方程.

解 设 $P(x,y,z)$ 是平面 π 关于直线 l 对称平面 π' 上任一点，由例4，$P'(x,y,z)$ 关于直线 l 的对称点 $P(2a+2Xd-x,2b+2Yd-y,2c+2Zd-y)$ 在平面 π 上，于是有

$$A(2a+2Xd-x)+B(2b+2Yd-y)+2C(2c+2Zd-z)+D=0$$

即 $(Ax+By+Cz+D)-2(Aa+Bb+Cc+D)-2(AX+BY+CZ)d=0$，因为 $d=\dfrac{X(x-a)+Y(y-b)+Z(z-c)}{X^2+Y^2+Z^2}$ 代入上式化简得

$$(X^2+Y^2+Z^2)(Ax+By+Cz+D)-2(AX+BY+CZ)(Xx+Yy+Zz+D)+2(AX+BY+CZ)(Xa+Yb+Zc+D)-2(X^2+Y^2+Z^2)(Aa+Bb+Cc+D)=0$$

此即为要求的平面方程.

评注 所要求的平面方程. 若用向量式就简单些. $\vec{v}=\{x,y,z\}$，$\vec{n}=\{A,B,C\}$，$\vec{X}=\{x,y,z\}$，$\vec{A}=\{a,b,c\}$，方程可写为 $[\vec{v}^{\,2}\vec{n}-2(\vec{v}\ \vec{n})\vec{v}]\cdot\vec{X}+2[(\vec{v}\cdot\vec{n})\vec{v}-\vec{v}^{\,2}\vec{n}]\vec{A}-\vec{v}^{\,2}D=0$.

4. 求点的轨迹方程

例7 试求过点 $P_0(2,3,-1)$ 而与直线

$$l:\quad \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=13+4t \end{cases}$$

间的角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的直线所构成的曲面方程.

解 设 $P(x,y,z)$ 为曲面上任一点，则 P_0P 与直线 l 间的角为 $\frac{\pi}{3}$，$\vec{v}=\{1,1,4\}$，P_0P 的方向向量为 $\{x-2,y-3,z+1\}$ 所以有

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|(x-2)+(y-3)+4(z+1)|}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2}}$$

化简整理得 $7x^2+7y^2-23z^2-4xy-16xz-16yz-20x-38y+50z+94=0.$

习 题 7.3

1. 判断下列每对直线的位置关系，若相交，求它们的交点.

(1) $l_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-3}{4}$，$l_2: \frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}$；

(2) $l_1: \begin{cases} x=1+2t_1 \\ y=2-2t_1 \\ z=-t_1, \end{cases}$ $l_2: \begin{cases} x=-2t_2 \\ y=-5+3t_2 \\ z=4; \end{cases}$

(3) $l_1: \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x+3y+6z-6=0, \end{cases}$ $l_2: \begin{cases} y+4z=0 \\ 3x+4y+7z=0. \end{cases}$

2. λ 为何值时，直线 $x+1=y-1=z$ 与直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$ 相交.

3. 求异面直线

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-8}{1}=\frac{z-3}{1} \text{ 与 } \frac{x+3}{-3}=\frac{y+7}{-2}=\frac{z-6}{4}$$

的公垂线的方程及它们间的距离和夹角.

4. 求点 $P(2,3,-1)$ 到直线 $\begin{cases} x-2y-11=0 \\ x+z+14=0 \end{cases}$ 的距离.

§7.4 平面束

一、基本内容

定义7.4.1 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做轴平面束，那条直线叫做平面束的轴.

定义7.4.2 空间中平行于同一个平面的所有平面的集合叫做平行平面束.

评注 换言之，平面束是具有某种性质 C 的平面的集合，因此平面束中的每个平面都具有性质 C，且具有性质 C 的任一平面都在这平面束中，这里性质 C 就是过同一条直线或平行于同一个平面.

定理7.4.1 设两相交平面

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

的交线为 l，则过 l 的平面方程是

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{7.4—1}$$

其中 λ、μ 是不全为零的实数.

分析 定理7.4.1实际上就是断言以 l 为轴的平面束中的每一个平面的方程都是(7.4—1)的形式，因此必须证两点：

(1) 式(7.4—1)是一个平面的方程，且这个平面 l 即只要证式(7.4—1)式的一次项系数不全为零，且 l 上任一点的坐标都满足式(7.4—1).

(2) 对于任何一个过直线 l 的平面 π，都存在不全为零的实数 λ、μ，使得 π 的方程为(7.4—1)的形式.

证明 (1)设 λ、μ 是任意两个不全为零的的实数，

(7.4—1)式可改写为

$$(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)z+(\lambda D_1+\mu D_2)=0 \quad (7.4—1')$$

用反证法，如果一次项系数全为0，即

$$\lambda A_1+\mu A_2=0, \lambda B_1+\mu B_2=0, \lambda C_1+\mu C_2=0$$

则

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=-\frac{\mu}{\lambda}.$$

这与 π_1、π_2相交的假设矛盾，故(7.4—1)是一个三元一次方程，它表示一个平面.

直线 l 上的点是 π_1 与 π_2的公共点，对 l 上任意的一点 (x_0,y_0,z_0)，它必满足 π_1，π_2的方程即 $A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0=0$，$A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0=0$从而当然有

$$\lambda(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)+\mu(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)=0$$

所以式(7.4—1)所表示的平面过直线 l.

(2) 设平面 π 过 l，在 π 上任取不属于 l 的一点(x_1,y_1,z_1)，令

$$\lambda_1=A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2$$
$$\mu_1=-(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)$$

因$(x_1,y_1,z_1)\notin l$，则 λ_1、μ_1不全为0，由(1)的结果，方程

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu_1(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (7.4—2)$$

表示一个过 l 的平面 π'，而点(x_1,y_1,z_1)满足 π' 的方程

$$(A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2)(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)$$
$$-(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)(A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2)=0$$

所以 π' 过点(x_1,y_1,z_1)，这样 π' 与 π 重合，于是 π 的方程就是(7.4—1).

定理6.3.4 如果两平面

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

平行，则任一与 π_1 或 π_2 平行的平面方程是：

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{7.4—3}$$

其中 λ、μ 不全为零的实数，且

$$-\mu:\lambda\neq A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2 \tag{7.4—4}$$

分析 该定理的证明完全类似于定理6.3.3. 由于 λ、μ 须满足条件(7.4—4)式，同样可用反证法得(7.4—3)式的一次项系数不全为0，同时用比例性质证得

$$(\lambda A_1+\mu A_2):(\lambda B_1+\mu B_2):(\lambda C_1+\mu C_2)=A_1:B_1:C_1$$

反之，设 $\pi /\!/ \pi_1$，任取 $(x_1,y_1,z_1)\in\pi$，同样可得不全为零的数 λ_1、μ_1，且 $-\mu_1:\lambda_1\neq A_1:A_2$（否则可得 $D_1:D_2=A_1:A_2$ 与已知矛盾），详细的证明留给读者完成.

实际上式(7.4—4)可改写为

$$\lambda(mA_2x+mB_2y+mC_2z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

其中 $m=\dfrac{A_1}{A_2}\neq 0$，则

$$(\lambda m+\mu)(A_2x+B_2y+C_2z)+\lambda D_1+\mu D_2=0$$

由 $\lambda m+\mu\neq 0$，于是化为

$$A_2x+B_2y+C_2z+l=0$$

其中 $l=\dfrac{\lambda D_1+\mu D_2}{\lambda m+\mu}=\dfrac{A_2(\lambda D_1+\mu D_2)}{A_1\lambda+A_2\mu}$.

因此有如下更简明、实用的推论：

推论7.4.1 由平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 决定的平面束（与 π 平行的全体平面）的方程是

$$Ax+By+Cz+l=0 \tag{7.4—5}$$

其中 l 是任意实数.

平面束还有其他形式，以上主要讨论了有轴平面束和平行平面束.

二、常用方法及应用举例

平面束的概念以及平面束的方程，对于解决过给定直线作平面的问题，提供了非常便利的条件.

例1 求过点 $P(1,1,1)$ 和直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y-4=0 \end{cases}$$

的平面方程.

解 设所求的平面的方程为

$$x+y+z+1+\lambda(2x-y-4)=0 \tag{1}$$

将 $P(1,1,1)$ 代入此方程，得

$$1+1+1+1+\lambda(2\times1-1-4)=0$$

解得 $\lambda=\frac{4}{3}$，将 $\lambda=\frac{4}{3}$ 代入方程(1)，经整理得所求平面的方程为

$$5x+y+3z-13=0$$

评注 在用(7.4—1)式解决具体问题时，常用下面一个参数的形式：

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

其中 λ 为任意实数，此方程表示的平面束仅较(7.4—1)少一个平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，在要求的平面方程不是此方程时，对问题的解答不受任何影响，而且待定系数法确定一个参数的值要比确定两个参数的值更自然简捷.

例2 求直线 $l:\frac{x-3}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ 在平面 $\pi:2x+y+z-1=0$ 上的射影.

解 把直线 l 的方程化为一般式.

$$l:\begin{cases}x-y-3=0\\y-2z=0\end{cases}$$

过直线 l 的平面的方程为

$$x-y-3+\lambda(y-2z)=0$$

即 $$x-(1-x)y-2\lambda z-3=0 \tag{1}$$

由于平面(1)同 π 垂直,故有

$$2\times1+1\times(\lambda-1)+1\times(-2\lambda)=0$$

解得 $\lambda=1$,代入(1)得平面方程为

$$x-2z-3=0$$

故 l 在 π 上的射影为

$$\begin{cases}2x+y+z-1=0\\x-2z-3=0\end{cases}$$

评注 求直线在平面上的射影,实际上是过直线而垂直于已知平面的平面与已知平面的相交直线.

例3 求过直线 $l:\begin{cases}x=3+2t\\y=3t\\z=t\end{cases}$ 的平面,使点 $A(3,1,4)$ 到该平面的距离为4.

解 将直线 l 的方程化为一般式:$\begin{cases}x-2z-3=0\\y-3z=0\end{cases}$

要求的平面方程为

$$x-2z-3+\lambda(y-3z)=0 \tag{1}$$

即 $$x+\lambda y-(2+3\lambda)z-3=0 \tag{2}$$

由点 $A(3,1,4)$ 到平面(2)距离为4,所以有

$$\frac{|3+\lambda-(2+3\lambda)\times4-3|}{1+\lambda^2+(2+3\lambda)^2}=4$$

即 $79\lambda^2+128\lambda+44=0$

解得 $\lambda=\dfrac{-64\pm2\sqrt{155}}{79}$，代入(2)有

$$x-\frac{64\pm2\sqrt{155}}{79}y+(\frac{64\pm2\sqrt{155}}{79}\times3-2)z-3=0$$

故要求的平面方程为

$$x-\frac{64+2\sqrt{155}}{79}y+\frac{34+6\sqrt{155}}{79}z-3=0$$

或 $$x-\frac{64-2\sqrt{155}}{79}y+\frac{34-6\sqrt{155}}{79}z-3=0.$$

例4 已知平面 π 与三个坐标平面所围的四面体的体积为4个立方单位，并过点 $A(2,1,0)$ 和 $B(1,1,\frac{3}{4})$，求平面 π 的方程.

解 设平面 π 的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

由于平面 π 过点 $A(2,1,0)$ 和 $B(1,1,\frac{3}{4})$，故有

$$\begin{cases}\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1 & (1)\\[2ex] \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{3}{4c}=1 & (2)\end{cases}$$

根据已知条件，还有

$$abc=6\times4$$

即 $$abc=24 \qquad (3)$$

由(1)、(2)有 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{4c}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{3}{2c}$ 即 $a=\dfrac{4c}{3}$，$b=\dfrac{2c}{3}$ 代入(3)，得 $\dfrac{8}{9}c^3=24$，即 $c^3=27$，故 $c=3$，于是有 $a=4$，$b=2$，所以平面 π 的方程为

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$$

例5 求过点 $P(4,0,-1)$且与二直线

$$l_1:\begin{cases}x+y+z=1\\2x-y-z=2\end{cases} \text{与 } l_2:\begin{cases}x-y-z=3\\2x+4y-z=4\end{cases}$$

都相交的直线的方程.

解 过点 $P(4,0,-1)$的直线为

$$\frac{x-4}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z+1}{Z}$$

l_1过点 $M_1(1,0,0)$方向向量$\overrightarrow{v_1}=\{0,3,-3\}$

l_2过点 $M_2(1,0,-2)$，方向向量$\overrightarrow{v_2}=\{5,-1,6\}$.

由于要求的直线与 l_1、l_2都相交，所以有

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}3 & 0 & -1\\X & Y & Z\\0 & 3 & -1\end{vmatrix}=0\\\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\X & Y & Z\\5 & -1 & 6\end{vmatrix}=0\end{cases} \quad \text{即}\begin{cases}3X+9Y+9Z=0\\X-13Y-3Z=0\end{cases}$$

解得 $X:Y:Z=15:3:-8$.

故所求的直线方程为

$$\frac{x-4}{15}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-8}$$

评注 例5用的是过点 $P(4,0,-1)$的直线束.

例6 平面 π 平行于平面$2x-3z+5=0$且原点到 π 的距离为2，求 π 的方程.

解 π 平行于已知平面，可设 π 的方程为

$$2x-3z+\lambda=0$$

其法方程即$\frac{-2x}{\sqrt{13}}+\frac{3}{\sqrt{13}}z-\frac{\lambda}{\sqrt{13}}=0$，又原点到 π 的距离为2，即$\frac{\lambda}{\sqrt{13}}=2$，得 $\lambda=2\sqrt{13}$. 所以 π 的方程是

$$2x-3z+2\sqrt{13}=0$$

小结 用平面束的原理求平面方程，一般先根据某个已知条件可确定平面属于某个面束，写出该面束的方程，再根据另外的已知条件求出面束的参数的比值或值，从而得到所求的平面方程. 用平面束解题思路清晰，计算简单，是一种很好的方法.

习 题 7.4

1. 求与平面 $3x+y-z+4=0$ 平行且在 oz 轴上截距等于2的平面方程.

2. 求过直线 $l:\begin{cases}x+5y+z=0\\x-y+4=0\end{cases}$ 且与平面 $\pi:x-4y-8z+12=0$ 交成 $\frac{\pi}{4}$ 的平面方程.

3. 求过两平面 $2x+y-z+1=0$，$x+y+2z+1=0$ 的交线，且平行于连结点 $A(2,5,-3)$ 与 $B(3,-2,2)$ 的直线的平面方程.

4. 试证二直线

$$l_1:\begin{cases}\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\quad l_2:\begin{cases}\pi_3:A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0\\\pi_4:A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0\end{cases}$$

在同一平面的充要条件是

$$\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\A_3 & B_3 & C_3 & D_3\\A_4 & B_4 & C_4 & D_4\end{vmatrix}=0$$

5. 设一平面与平面 $x+3y+2z=0$ 平行，且与三坐标轴围成的四面体的体积为6，求这个平面的方程.

6. 求过平面$6x-y+3z-1=0$和$x+2y+z=0$的交线且平行于平面$5x-3y+2z-3=0$的平面.

7. 证明三个平面$7x+4y+7z+1=0$，$x+2y+3z-1=0$，$2x-y-z+2=0$通过同一条直线.

8. 设三个平面：$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0(i=1,2,3)$相交于一点，证明过这交点的所有平面的方程都具有形

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+\lambda_3(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0 \quad (*)$$

其中 $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\neq 0$.

第8章　曲面和空间曲线

曲面和空间曲线是解析几何讨论的主要内容．本章主要介绍曲面和空间曲线的常用方法及其应用，特别是对球面、柱面、锥面和旋转曲面中的常用方法将作专门讨论．

§8.1　曲面的方程

一、基本内容

1° 在空间坐标系下，给定方程与其图形的关系

给定方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{1}$$

和一个曲面 Σ．如果：

①坐标满足方程(1)的点均在曲面 Σ 上；

②曲面 Σ 上任一点的坐标均满足方程(1)，则方程(1)叫曲面 Σ 的普通方程，而曲面 Σ 叫方程(1)的图形．

2° 在空间坐标系下，将坐标 x、y 和 z 表成两个变数 u 和 v 函数表达式

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \quad (a\leqslant u\leqslant b, c\leqslant v\leqslant d) \\ z=z(u,v) \end{cases} \tag{2}$$

如果：

①对于 u,v 的每一对值，由(2)确定的点 (x,y,z) 都在某一曲面 Σ 上；

②曲面 Σ 上每一点的坐标都可由某一对 $u,v(a\leqslant u\leqslant b$，

$c\leqslant v\leqslant d$)通过(2)确定，则称(2)为曲面 Σ 的参数方程，u,v 为参数.

3° 曲面的参数方程

式(2)也可写成矢量形式

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v),\quad (a\leqslant u\leqslant b, c\leqslant v\leqslant d) \tag{3}$$

其中 x,y,z 和 $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ 分别为 $\vec{r}$ 和 $\vec{r}(u,v)$ 的分量. 这时(2)又叫曲面的坐标式参数方程.

二、常用方法及应用举例

对空间曲面的研究，有一个基本课题，就是在具体的坐标系下求已知曲面的方程. 下面用具体实例介绍已知曲面求其方程的常用方法.

例1 已知定平面 π 与定直线 l 平行，求与它们的距离之比为常数的点的轨迹方程.

解 以定直线 l 为 z 轴，通过 l 且与平面 π 平行的平面为 yoz 面建立空间直角坐标系. 可设定平面 π 的方程为 $x=a$，$M(x,y,z)$ 是满足条件的任意一点. 据动点 M 满足的条件有

$$|x-a|=k\sqrt{x^2+y^2} \tag{4}$$

其中 $k>0$ 为常数. 将(4)化简整理得

$$(k^2-1)x^2+k^2y^2+2ax-a^2=0 \tag{5}$$

因将(4)化简整理成(5)是同解变形，故(5)就是所求轨迹的方程.

评注 从本例可见，求动点产生曲面的普通方程可采用如下步骤：

1° 建立适当的空间直角坐标系；

2° 将曲面上动点 $M(x,y,z)$ 满足的条件表为一个等式，并用坐标表示之；

3° 将等式化简整理得一个关于 x,y,z 的方程；

4° 讨论所得方程是否为动点产生的曲面方程.

这与平面上已知曲线求其方程类似.

例2 已知平面 π 在三坐标轴上截距之和为定值,求原点在平面 π 上的射影的轨迹方程.

解 设平面 π 的方程为

$$\pi: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{6}$$

a,b,c 满足

$$a+b+c=k(\text{定值}) \tag{7}$$

又设原点在平面 π 上的射影为 $M(x,y,z)$,则点 M 的坐标 x,y,z 满足(6),并且

$$\frac{x}{\frac{1}{a}}=\frac{y}{\frac{1}{b}}=\frac{z}{\frac{1}{c}} \tag{8}$$

式消去(6)、(7)、(8)中的参数 a、b、c,并化简整理得

$$(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)=kxyz$$

其中 $xyz\neq0$,这就是所求轨迹方程.

评注 通过本例可知,求动点产生曲面的普通方程,可将动点满足的条件表成含 n 个参数的 $n+1$ 个等式,然后从这 $n+1$ 个等式消去 n 个参数而得轨迹方程,此为求曲面的普通方程的常用方法之一(请续阅 § 8.4例5、6).

例3 半径为 a 的动圆与一定直线 l 始终共面,并且圆心与 l 相距为 $b(b>a>0)$. 求动圆绕 l 作螺旋运动产生的曲面的参数方程.

解 如图8—1所示,以定直线 l 为 z 轴建立空间直角坐标系,假定动圆初始位置之圆心为 $(b,0,0)$,并且动圆绕 l 运动的角速度为 ω,直线运动速度为 v,t 秒以后,动圆中心为 P,$M(x,y,z)$ 为动圆上任一点,P、M 在 xoy 面上的射影分别为 P'、M',则

有$\angle xOP'=\omega t$，$P'P=vt$，又设$\angle P'PM=\varphi(0\leqslant\varphi<2\pi)$，则

$$OM'=OP'+P'M$$
$$=b+a\sin\varphi$$
$$M'M=vt-a\cos\varphi$$

于是

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}$$
$$=\vec{i}(b+a\sin\varphi)\cos\omega t$$
$$+\vec{j}(b+a\sin\varphi)\sin\omega t$$
$$+\vec{k}(vt-a\cos\varphi)$$

又$\vec{r}=x\vec{i}+\vec{y}+z\,k$，故

$$\begin{cases} x=(b+a\sin\varphi)\cos\omega t \\ y=(b+a\sin\varphi)\sin\omega t \\ a=vt-a\cos\varphi \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} 0\leqslant\varphi<2\pi \\ -\infty<t<+\infty \end{matrix}\right) \qquad (10)$$

(9)，(10)分别是动圆产生曲面的矢量式和坐标式参数方程.

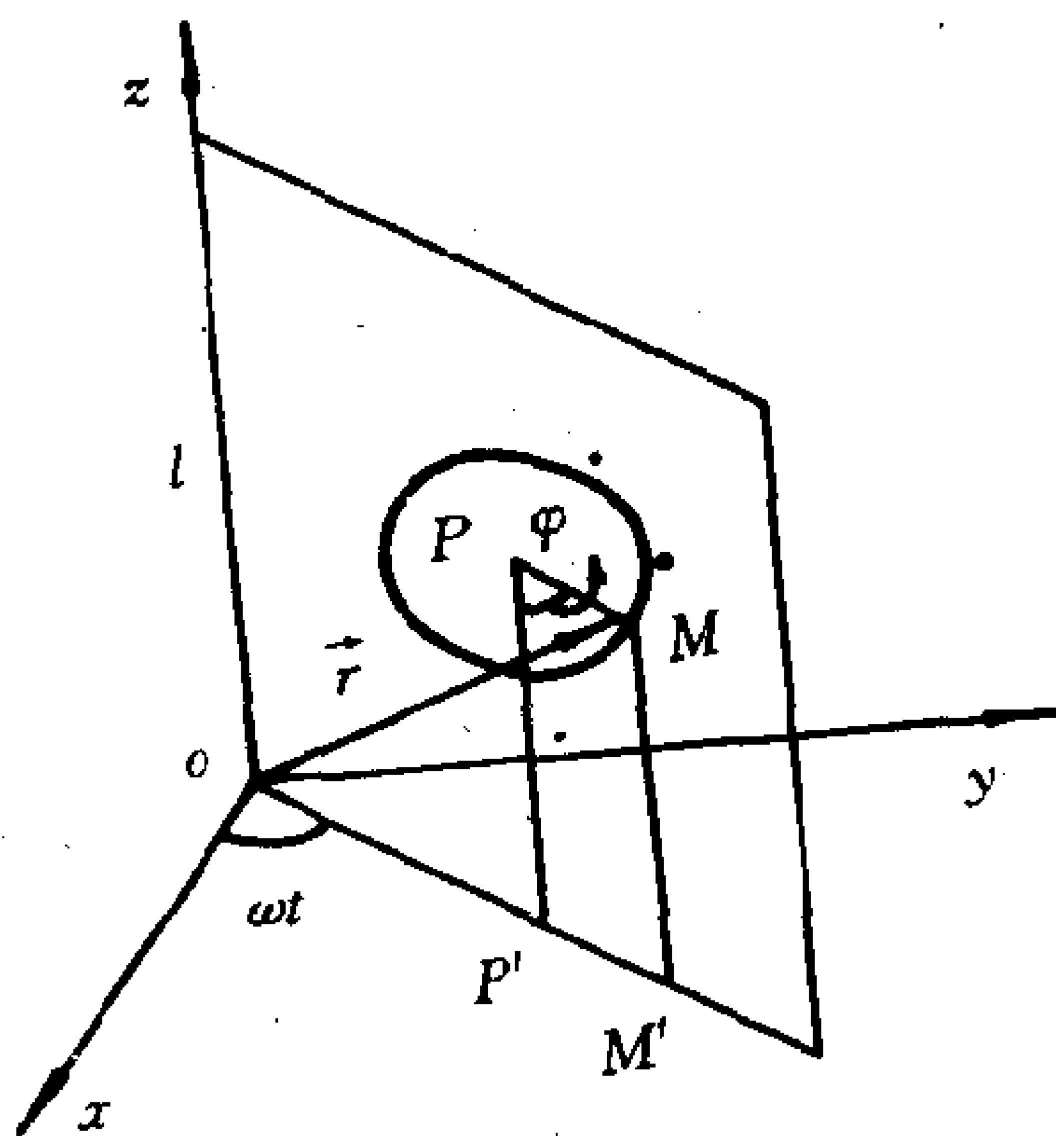


图 8—1

评注 1°求曲面的参数方程，除要建立适当的空间直角坐标系外，还应选取两个适当的参数，只有做到这两个“适当”，才能容易地求解.

2°通常根据不同问题选取角度、斜率、距离、时间、速度、位移等几何参数或物理参数，并注意两个参数的相

互独立性.

3°在(9)或(10)中,令 $v=0$,则得圆环面的参数方程.

例4 已知直线 $l_i:\vec{r}=\vec{r}_i+\vec{v}_i t,(i=1,2)$为两条异面直线,点 A,B 分别在 l_1,l_2上移动,点 M 分$\overline{AB}$成定比($\lambda\neq 0,-1$),求点 M 的轨迹的参数方程.

解 设 $A(\vec{r}_1+\vec{v}_1 t),B(\vec{r}_2+\vec{v}_2 t'),M(\vec{r})$. 则由定比分点公式得

$$\vec{r}=\frac{1}{1+\lambda}[(\vec{r}_1+\vec{v}_1 t)+(\lambda\vec{r}_2+\vec{v}_2 t)]$$

即

$$\vec{r}=\frac{\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}+\vec{v}_1 u+\vec{v}_2 v$$

这就是所求轨迹矢量式参数方程,其中 $u=\frac{t}{1+\lambda},v=\frac{\lambda t'}{1+\lambda}$是参数.

评注 易见所求轨迹是过定点 $M_0(\frac{\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_2}{1+\lambda})$,且与直线 l_1,l_2均平行的平面,这里充分利用直线、平面的矢量式方程,使解法简单明了.

例 5 求曲面 $x^2+y^2=a^2z^2(a>0)$的参数方程.

解法一 由曲面方程易知,曲面上的点(x,y,z)满足 $-\infty<x,y,z<+\infty$,先令 $az=u(-\infty<u<+\infty)$,代入曲面方程有 $x^2+y^2=u^2$,故可再设 $x=u\cos v,y=u\sin v(0\leqslant v<2\pi)$故曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=\frac{u}{a} \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} -\infty<u<+\infty \\ 0\leqslant v<2\pi \end{matrix}\right)$$

解法二 令$y=x\operatorname{tg}u(-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2})$，代入曲面方程得$az=\pm x\sec u$，故设$x=v(-\infty<v<+\infty)$便得曲面的参数方程

$$\begin{cases} x=v \\ y=v\operatorname{tg}u \\ z=\pm\frac{v}{a}\sec u \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2} \\ -\infty<v<+\infty \end{array}\right)$$

评注 在由已知曲面的普通方程求其参数方程时，因出发点不同，可得到不同形式的参数方程. 但这些参数方程及原方程之间必须互相等价，因为它们代表同一曲面. 为了保证方程间的等价性，确定参数的范围十分重要. 参数范围与原方程中x,y,z的范围是紧密联系的，在求解过程中只要处处留心这一点，便不难准确确定参数范围.

例6 求曲面$(x+1)^2-y^2(1+z)-z=0$的参数方程.

解 从曲面的普通方程可解得

$$z=\frac{(x+1)^2-y^2}{1+y^2} \tag{11}$$

令$x+1=uy(-\infty<u<+\infty)$，$y=\operatorname{tg}v(-\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2})$，代入(11)得$z=(u^2-1)\sin^2 v$，故得曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x=u\operatorname{tg}v-1 \\ y=\operatorname{tg}v \\ z=(u^2-1)\sin^2 v \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} -\infty<u<+\infty \\ -\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2} \end{array}\right)$$

评注 一般地，若从曲面Σ的方程(1)中解出一个坐标，

比如能用 x,y 表示 z：

$$z = f(x,y) \tag{12}$$

则选取两个适当的二元函数 $x=x(u,v)$，$y=(y(u,v)$，然后结合(12)便可得曲面的参数方程

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = f(x(u,v),y(u,v)) \equiv z(u,v) \end{cases}$$

其中 $a\leqslant u\leqslant b, c\leqslant v\leqslant d$. 若能从曲面的参数方程消去参数，则可得曲面的普通方程，但同样要注意方程的等价性.

例7 求曲面

$$\begin{cases} x = \dfrac{au}{u^2+v^2} \\ y = \dfrac{bv}{u^2+v^2} \\ z = \dfrac{u^2+v^2+1}{u^2+v^2} \end{cases}$$

$(0\leqslant u,v<+\infty, u^2+v^2\neq 0, a,b$ 为常数且都大于0)的普通方程.

解 由曲面的参数方程易知，曲面上的点 (x,y,z) 满足 $x,y\geqslant 0$，并且

$$\frac{x}{a} = \frac{u}{u^2+v^2}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{v}{u^2+v^2}$$

$$\frac{1}{u^2+v^2} = z-1$$

前二式平方相加再利用第三式有

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z-1 \quad (x,y\geqslant 0)$$

这就是所求的普通方程.

小结 本节用实例介绍了已知曲面求其普通方程和参数方程以及两种方程互化的常用方法. 求曲面的普通方程和参数方程都应在适当的坐标系下进行；前者关键是如何将曲面上点的特征转化为等式，后者重要的是如何选取两个适当的参数. 在进行两种方程互化时，应特别注意方程的等价性.

习 题 8.1

1. 已知定直线 l 与定平面 π 垂直，求与它们的距离之差为常数的点的轨迹方程.

2. 求动点 M 的轨迹方程，已知线段 OM 的中点在曲面 $F(x,y,z)=0$ 上.

3. 求到两异面直线距离平方和为定值的点的轨迹方程.

4. 动点 M 到三个平面 $x+y+z=0$，$x-z=0$，$x-2y+z=0$ 的距离平方和为9，求点 M 的轨迹方程.

5. 三点 A，B，C 分别在三坐标轴上移动，若$\triangle ABC$ 面积为定值，求原点在平面 ABC 上的射影的轨迹方程.

6. 长为 p 的线段 AB 在直线 l 上滑动，M 为直线 l 外一定点，求与点 M，A，B 等距之点的轨迹方程.

7. 半径为 R 的圆平行于平面 $x=a$，且沿方向 $l:m:n$ 作平移，求该圆产生的轨迹的参数方程.

8. 已知两个动点坐标为 $P(u^2,u,0)$，$Q(v^2,0,v)$ $(-\infty<u,v<+\infty)$，若 P，Q 在变动中还保持线段 PQ 与平面 $y=z$ 平行，求直线 PQ 产生曲面的参数方程与普通方程.

9. 求下列曲面的参数方程.

(1) $y^2=4ax$； (2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$；

(3) $x^2z^2=x^2+y^2$； (4) $x^2+y^2-y^2z-x^2z+1=0$.

10. 求曲面 $\vec{r}=\{5\cos u+5v, 5\sin u+3v, 2+2v\}$ 的普通方程，其中

$0 \leqslant u < 2\pi, -\infty < v < +\infty.$

§8.2 空间曲线的方程

一、基本内容

1° 在空间坐标系下，给定方程

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

和一曲线 l，如果①坐标满足方程组(1)的点均在曲线 l 上；②曲线 l 上任一点的坐标均满足方程组(1)，则(1)叫曲线 l 的一般方程.

2° 曲线 l 的一般方程是不唯一的，相交于 l 的任二不同曲面的方程联立均是曲线 l 的一般方程.

3° 在空间坐标系下，将动点坐标 x,y,z 表成变数 t 的函数表达式

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{2}$$

如果①对于 t 的每一个值，由(2)确定的点 (x,y,z) 在一条曲线 l 上；②曲线 l 上每一点的坐标，都可由 $t(a \leqslant t \leqslant b)$ 的某一个值通过(2)得到，则(2)叫曲线 l 的参数方程，t 叫参数.

4° 曲线 l 的参数方程(2)常常写成矢量形式

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{3}$$

x,y,a 和 $x(t),y(t),z(t)$ 分别表示 $\vec{r}$ 和 $\vec{r}(t)$ 的分量，这时(2)又叫曲线的坐标式参数方程.

二、常用方法及应用举例

例 1 设定直线 l 垂直于定平面 π，动点 M 到 l 与 π 的距

离之比为定值 λ，且点 M 在定直线 l 上的射影为定点，试求点 M 的轨迹方程.

解 取定平面 π 为 xoy 面，定直线 l 为 z 轴建立空间直角坐标系，并设动点 $M(x,y,z)$ 在 l 上的射影为 $(0,0,a)$（a 为常数）. 据题意得

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=\lambda|z|\\ z=a\end{cases}$$

化简整理得点 M 的轨迹方程

$$\begin{cases}x^2+y^2=\lambda^2a^2\\ z=a\end{cases}$$

注意，在化简整理过程中，前后方程是否同解至关重要.

例 2 已知 A,B,C 为不共线三定点，求与点 A,B,C 等距的点 M 的轨迹方程.

解 以 $\triangle ABC$ 的外心为原点，平面 ABC 为 xoy 面建立空间直角坐标系. 设 $A(a_1,a_2,0)$，$B(b_1,b_2,0)$，$C(c_1,c_2,0)$，$M(x,y,z)$，则因 $OA=OB=OC$ 得

$$a_1^2+a_2^2=b_1^2+b_2^2=c_1^2+c_2^2$$

再据题意得

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+z^2}\\=&\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+z^2}\\=&\sqrt{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+z^2}\end{aligned}$$

整理得

$$\begin{cases}(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)y=0\\(a_1-c_1)x+(a_2-c_2)y=0\end{cases}$$

由于 A,B,C 不共线，故

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \\ a_1 - c_1 & a_2 - c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

所以

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

此即点 M 的轨迹方程,可见所求轨迹即为 z 轴.

评注 1° 从两例可见,已知曲线求方程与已知曲面求方程在方法上是类似的.

2° 曲线的一般方程虽不唯一,但它们一定同解,因此,常常用较简单的方程去代替形式上较复杂的同解方程.

例 3 一质点从球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上的点 $A(R,0,0)$ 出发,一方面在球面上朝北作等线速运动,另一方面绕着 z 轴作等角速旋转,试求该质点轨迹的参数方程.

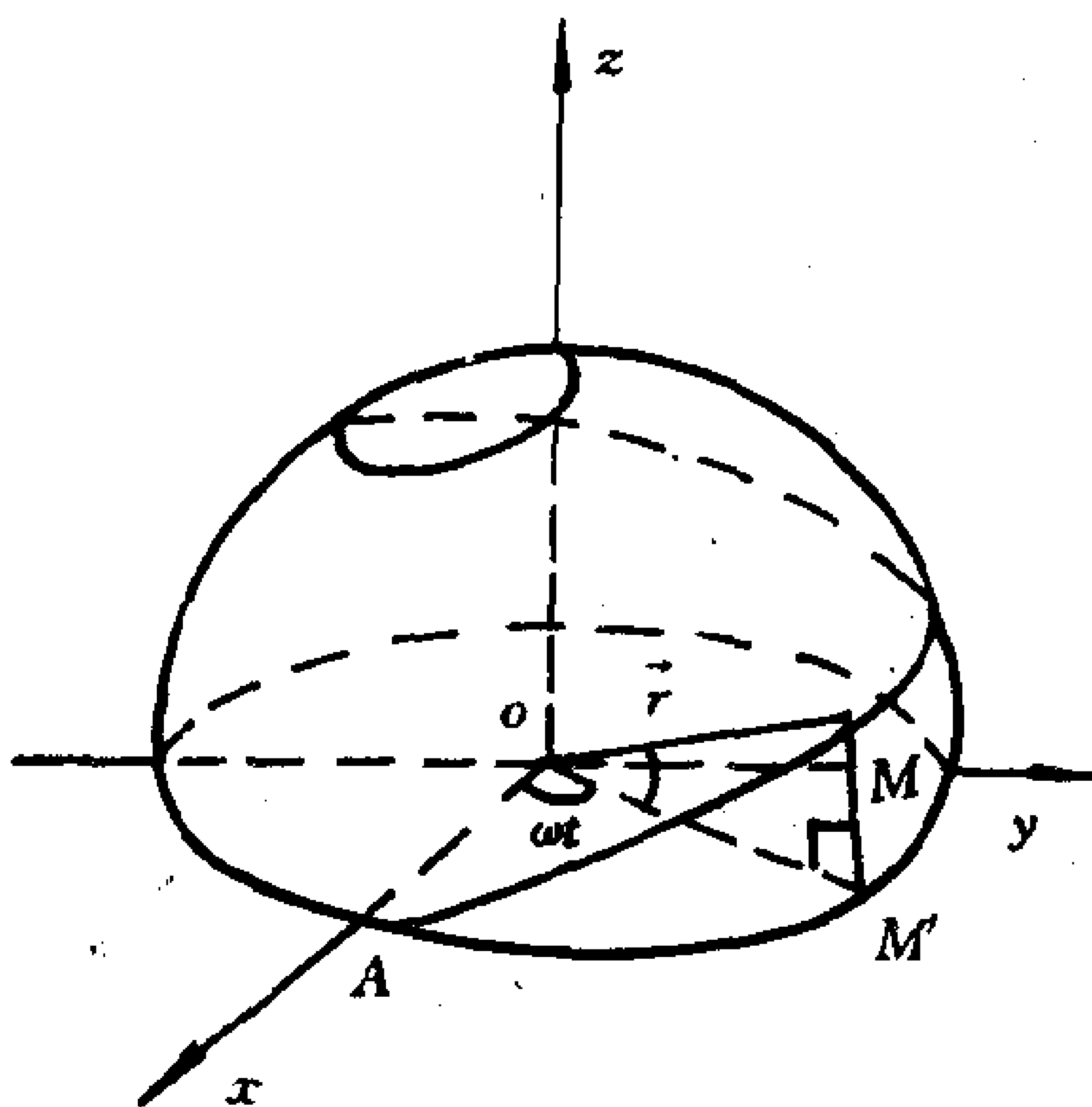


图 8—2

解 如图8—2所示,设质点运动的线速度为 v、角速度为 ω,t 秒后质点运动到点 $M(x,y,z)$ 的位置,M 在 xoy 面上的射影为 M',则$\angle(\vec{i},\overrightarrow{OM'})=\omega t$,$\angle(\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM})=\frac{vt}{R}$. 由

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}$$

知

$$\vec{r} = \vec{i}R\cos\frac{vt}{R}\cos\omega t + \vec{j}R\cos\frac{vt}{R}\sin\omega t + \vec{k}R\sin\frac{vt}{R} \quad (4)$$

令 $\omega t=\theta, \frac{v}{\omega R}=a$，由 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 得

$$\begin{cases} x = R\cos a\theta\cos\theta \\ y = Rcswa\theta\sin\theta \\ z = R\sin a\theta \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2a}) \quad (5)$$

(4)、(5)分别是质点轨迹的矢量式和坐标式参数方程.

例 4　已知平面 $\vec{r}(u,v)=\vec{r}_0+\vec{a}u+\vec{b}v$，其中 $\vec{a},\vec{b}$ 是互垂的单位矢量，求以点 $C(\vec{r}_0)$ 为中心、R 为半径，且在已知平面上的圆的参数方程.

解　设 $M(\vec{r})$ 为圆上任意一点，$\angle(\vec{a},\overrightarrow{CM})=\theta$，由于 $\overrightarrow{CM},\vec{a},\vec{b}$ 共面，$|\overrightarrow{CM}|=R$，故

$$\overrightarrow{CM} = \vec{a}R\cos\theta + \vec{b}R\sin\theta$$

所以由 $\vec{r}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}$ 得所求圆的矢量式参数方程

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}R\cos\theta + \vec{b}R\sin\theta \quad (0 \leqslant \theta < 2\pi)$$

特别 $\vec{a}=\vec{i},\vec{b}=\vec{j}$ 时，圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\theta \\ y = y_0 + R\sin\theta \\ z = z_0 \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta < 2\pi)$$

评注　从以上两例可见，求曲线的参数方程同求曲面的参数方程一样，重要的是做到两个"适当"，即建立适当的空间坐标系，选取一个适当的参数.

例 5　求曲线 $\vec{r}=\{a(\cos t+\sin t),b(\cos t-\sin t),c\sin 2t\}$ $(a,b,c>0,-\infty<t<+\infty)$ 的一般方程.

解 从

$$\begin{cases} x = a(\cos t + \sin t) \\ y = b(\cos t - \sin t) \\ z = c\sin 2t \end{cases}$$

消去 t 得曲线的一般方程为

$$\begin{cases} x^2 = a^2(1 + \dfrac{z}{c}) \\ y^2 = b^2(1 - \dfrac{z}{c}) \end{cases}$$

评注 已知曲线 l 的参数方程(2)，若能消去参数，则可得其一般方程(1). 反之，若从曲线 l 的一般方程(1)能解出两个坐标，比如用 z 可表示 x, y：

$$x = \varphi(z), \qquad y = \psi(z) \tag{6}$$

则令 z 为 t 的某一函数 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 并结合(6)就得曲线 l 的参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(z(t)) \equiv x(t) \\ y = \psi(z(t)) \equiv y(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b) \\ z = z(t) \end{cases}$$

例 6 求曲线

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 2\sin z = 5 \\ 2x - y - 6z + \sin z = 0 \end{cases}$$

的参数方程.

解 从曲线的一般方程可解得

$$\begin{cases} x = 3z + 1 \\ y = \sin z + 2 \end{cases}$$

令 $z=t(-\infty<t<+\infty)$ 代入上式便得曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = \sin t + 2 \qquad (-\infty < t < +\infty) \\ z = t \end{cases}$$

特殊情况下，空间曲线可为平面曲线，考查一曲线是否为平面曲线的常用方法如下例所示.

例 7 试证曲线 $x=t^2+1, y=t^2-5t, z=-t^2+3t$ 是平面曲线，并求所在平面方程.

解 设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，将曲线方程代入并整理有

$$(A + B - C)t^2 + (-5B + 3C)t + (A + D) = 0$$

令 $$A + B - C = -5B + 3C = A + D = 0$$

可解得

$$A:B:C:D = 2:3:5:(-2)$$

因此所给曲线为平面曲线，所在平面为

$$2x + 3y + 5z - 2 = 0$$

评注 此平面也可从曲线的方程消去参数 t 得到，从而证得曲线为平面曲线，若平面曲线方程用一般式给出，也可用同解变形求出所在的平面，比如曲线

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

将方程同解变形为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

因此曲线在平面 $z=0$ 上.

例8 试证 Viviani 曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$

在一抛物柱面上.

证明 将 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2-ax=0$ 相减并整理得

$$z^2=-a(x-a)$$

因此

$$\begin{cases}x^2+y^2-ax=0\\ z^2=-a(x-a)\end{cases}$$

也是 Viviani 曲线的一般方程,它表明曲线在抛物柱面 $z^2=-a(x-a)$ 上.

小结 本节用数例介绍了已知曲线求其一般方程和参数方程以及两种方程互化的一些常用方法. 求曲线的一般方程,是将曲线上点的特征转化为两个不同解的方程,此二方程联立并作进一步化简就得曲线的一般方程. 求曲线的参数方程,是在建立适当的空间坐标系和选取一个适当的参数后,将曲线上动点的坐标表成这个参数的函数,同曲面方程一样,在对曲线的一般方程和参数方程互化时,要注意方程的等价性.

习 题 8.2

1. 在曲面 $xy=z$ 上求一条曲线,使该曲线在 xoy 面上的射影是曲线 $y=x^2,z=0$.

2. 过点 $P(a,b,c)$ 有一动平面,该平面与三坐标轴分别交于 A,B,C 三点,且四面体 $OABC$ 的体积为定值,试求 $\triangle ABC$ 的重心产生的轨迹方程.

3. 已知点 $A(1,0,0),B(0,2,3)$,求使四面体 $OABC$ 的体积为5且到原点距离为3的点 C 的轨迹方程.

4. 设有一条起点在 z 轴且与 z 轴垂直的动射线,一方面它的起点从坐标原点出发,以等线速度 a 沿 z 轴正向运动,另一方面射线以等角速 ω 绕 z 轴旋转,射线上有一质点从射线起点开始,以等线速度 b 向射

线方向前进，求该质点运动轨迹的参数方程.

5. 设点 P 为定点，Q 为一条圆柱螺线上任意一点，求线段 PQ 中点的轨迹方程.

6. 求双曲螺线 $\vec{r}=\{a\operatorname{ch}t, a\operatorname{sh}t, bt\}$ 的一般方程.

7. 求证曲线 $\vec{r}=e^t\{a\cos t, a\sin t, b\}$ 在锥面 $b^2(x^2+y^2)=az^2$ 上.

8. 求下列曲线的参数方程.

(1) $\begin{cases} x^2=2az, \\ y^2=2bz; \end{cases}$ $(a,b>0)$ (2) $\begin{cases} 2x^2-y+1=0, \\ 3xy-3x-2z+4=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^2-y^2=z \end{cases}$.

9. 证明曲线(1) $x=t^3+t^2, y=2t^3+2t+1, z=t^2-t$；(2) $2x^2+y^2+2z^2=1, y=x^2+z^2$ 为平面曲线.

10. 证明曲线 $x^2-y^2=z, 2x^2+z^2=1$ 为球面曲线.

§8.3 曲线产生曲面

一、基本内容

1° 曲面的产生一般有两种方法，一种是将曲面看作具有某种几何特征的点的集合；另一种是将曲面看作由动曲线依某种规律运动产生的，即所谓曲线产生曲面.

2° 已知曲线族方程为

$$\begin{cases} F_1(x,y,z,\lambda)=0 \\ F_2(x,y,z,\lambda)=0 \end{cases} \quad (\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2) \tag{1}$$

若从(1)能消去 λ 而得

$$F(x,y,z)=0 \tag{2}$$

则方程(2)即曲线族(1)产生的曲面方程.

一般地，一个含有 n 个参数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_n$ 的曲线族

$$\begin{cases} F_1(x,y,z,\lambda_1\cdots,\lambda_n)=0 \\ F_2(x,y,z,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=0 \end{cases} \tag{3}$$

其中 n 个参数适合 $n-1$个关系式

$$\varphi_i(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=0, i=1,2,\cdots n-1 \tag{4}$$

由(3),(4)共 $n+1$个式子若能消去 n 个参数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 就可得曲线族(3)产生的曲面方程.

二、常用方法及应用举例

求曲线族产生的曲面方程的常用方法是:先求出曲线族的方程,并且若其中含有 n 个参数,则要找出这 n 个参数应满足的 $n-1$个关系式,然后设法消去这 n 个参数而得一个关于 x,y,z 的方程,必要时化简整理就得曲面的方程.

例1 求直线族

$$\begin{cases} x+y+\lambda z=0 \\ 3x-\lambda y+z=\lambda \end{cases} \quad (-\infty<\lambda<+\infty)$$

产生的曲面方程.

解 从直线族方程消去 λ 得

$$y^2+z^2+xy+3xz+x+y=0$$

即为所求.

例2 求与三条直线

$$l_1:\begin{cases} y=z \\ x=1 \end{cases} \quad l_2:\begin{cases} y=-z \\ x=-1 \end{cases}; \quad l_3:\begin{cases} 4x+3y-5=0 \\ 5x+3z-4=0 \end{cases}$$

均共面的动直线产生的曲面方程.

解 因动直线与 l_1,l_2共面,则利用平面束可得动直线的方程为

$$\begin{cases} y-z+\lambda(x-1)=0 \\ y+z+\mu(x+1)=0 \end{cases} \tag{5}$$

其中 λ、μ 为参数,它与直线 l_3共面,则

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 & -\lambda \\ \mu & 1 & 1 & \mu \\ 4 & 3 & 0 & -5 \\ 5 & 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\lambda\mu + 1 = 0 \tag{6}$$

(5)是曲线族方程，(6)是两个参数满足的一个关系式，从(5)，(6)消去参数 λ,μ 就得动直线产生的曲面方程

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

例3 已知曲线 $l: z^2=2py, x=0$. 现使 l 的顶点在直线 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 上滑动，并保持 l 所在平面与平面 $x=0$ 平行、开口方向不变，求此曲线运动产生的曲面方程.

解 设动曲线的顶点为 (x',y',z')，则其方程为

$$\begin{cases}(z-z')^2 = 2p(y-y') \\ x = x'\end{cases} \tag{7}$$

又点 (x',y',z') 在直线 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 上，因此

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \tag{8}$$

从(7)，(8)消去参数 x',y',z' 即得曲面方程

$$9x^2 + z^2 - 6xz + 4px - 2py = 0$$

例4 点 A 在圆 $x^2+y^2-2ax=0, z=0$ 上，点 B 在 z 轴上，并保持 $OA=OB$，求直线 AB 产生的曲面方程.

解 设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(0,0,z_2)$，则直线 AB 的方程为

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z-z_2}{z_1-z_2} \tag{9}$$

并且

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 = 0 \\ z_1 = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = z_2^2 \end{cases} \tag{10}$$

从(9),(10)消去 x_1, y_1, z_1, z_2 得曲面方程

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = z^2(x^2 + y^2)$$

评注　请将以上各例介绍的方法与§8.1中例2所用方法相比较,找出异同点.

小结　本节主要介绍了求曲线产生曲面的常用方法.从实例可见,求动曲线产生的曲面方程,一般有选参数、写曲线族方程、找参数满足的关系式、消参数等四个步骤.参数个数以多少为宜,要依具体问题确定.不过应注意,参数选得愈少,消参数和化简可能愈方便.

解析几何中讨论的许多曲面都可看作由曲线产生的,因此,掌握本节介绍的常用方法很有必要.

习　题　8.3

1. 求直线 $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ 绕 z 轴作螺旋运动产生的曲面方程.

2. 过原点作直线族

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\lambda \\ \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z \end{cases} \qquad (\lambda \text{ 为参数}, a, b > 0)$$

的相交垂线,求这些垂线的轨迹方程.

3. 已知直线 $l: x = a, z = 0$,在 l 上任取一点 C,在平面 COZ 内作以 O 为心,OC 为半径的圆.求这些圆产生的轨迹方程.

4. 动直线与曲线 $l: y^2 = x, z = 0$ 相交,且与直线 $x = y = z$ 平行,求动直线产生的曲面方程.

5. 已知抛物线 $l: x^2=y, z=0$. 在 l 上任取一点 P，作以 P 为心，R 为半径，并且所在平面与 yoz 面平行的圆，求这样的圆的轨迹方程.

6. 求与直线

$$l_1:\begin{cases} y=x \\ z=c \end{cases} \quad l_2:\begin{cases} y=-x \\ z=-c \end{cases} \quad l_3:\begin{cases} y=z \\ x=-c \end{cases}$$

都相交的动直线产生的轨迹方程(其中 $c\neq 0$).

7. 求与直线 $\frac{x-a}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$，$\frac{x+a}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 及圆 $x^2+y^2=a^2, z=0$ 同时相交的直线产生的轨迹方程.

8. 通过两已知异面直线分别作一平面，使两平面互相垂直，求两平面交线产生曲面的方程.

§8.4　球　面

一、基本内容

1. 球面方程的几种常见形式

①标准方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \tag{1}$$

其中心是 (x_0, y_0, z_0)，半径是 R.

②参数方程

$$\begin{cases} x=x_0+R\cos\theta\cos\varphi, \\ y=y_0+R\cos\theta\sin\varphi, \\ z=z_0+R\sin\theta \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 0\leqslant\varphi<2\pi \\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \tag{2}$$

其中心是 (x_0, y_0, z_0) 半径是 R.

③矢量方程

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)^2=R^2 \tag{3}$$

其中心是 $C(\vec{r}_0)$，半径为 R. 特别地，中心在原点，半径为 R 的球面的矢量方程为

$$\vec{r}^2 = R^2$$

④一般方程

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \tag{4}$$

其中心是$\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$，半径是$\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$.

2. 球面的切线、切平面

①与球面交于两个重合点的直线叫球面的切线. 球面的切线与球心距离为球面的半径.

②过球面上一点的所有切线产生一个平面，叫球面在这一点处的切平面. 球面(1)上点$M_1(x_1, y_1, z_1)$处的切平面为

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) + (z_1 - z_0)(z - z_0) = R^2$$

而球面(4)上点$M_1(x_1, y_1, z_1)$处的切平面为

$$x_1x + y_1y + z_1z + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + \frac{C}{2}(z + z_1) + D = 0$$

3. 两球面的交角

两球面Σ_1, Σ_2在某公共点P外的交角定义为它们在这点外的切平面的交角，其交角公式为

$$\cos\varphi = \pm \frac{R^2 + \overline{R}^2 - d^2}{2R\overline{R}} \tag{5}$$

其中$R, \overline{R}$分别是Σ_1, Σ_2的半径，d为球心距离.

从(5)知，两球面交角与点P在交线圆上的位置无关.

推论 两球面直交的条件是$R^2+\overline{R}^2=d^2$.

若球面方程为

$$\Sigma_i: \quad x^2 + y^2 + z^2 + A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

由(5)便得交角公式

$$\cos\varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 - 2D_1 - 2D_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 - 4D_1}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 - 4D_2}} \tag{6}$$

从而直交条件为

$$A_1A_2 - B_1B_2 + C_1C_2 = 2D_1 + 2D_2$$

4. 球面束

已知两球面 $\Sigma_i: f_i(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2+A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0(i=1,2)$，则以此二球面交线圆为基圆的球面束方程是

$$\lambda f_1 + \mu f_2 = 0 \quad (\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$$

已知圆方程为

$$\begin{cases} f(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi(x,y,z) \equiv Ex + Fy + Gz + H = 0 \end{cases}$$

则以此圆为基圆的球面束方程是

$$f + \lambda\pi = 0$$

二、常用方法及应用举例

1. 求球面的方程

例1 求证：球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2+2x-16z+56=0$ 与平面 $\pi: x+2y+2z+3=0$ 相离，并求与球面 Σ 和平面均相切且与 Σ 球心连线垂直于平面 π 的球面方程.

证明 将球面 Σ 的方程配方得

$$(x+1)^2 + y^2 + (z-8)^2 = 9$$

故球面 Σ 的中心为 $C(-1,0,8)$，半径 $R=3$.

又点 C 到平面 π 的距离

$$d(C,\pi) = \frac{|-1+0+16+3|}{\sqrt{1+4+4}} = 6 > R$$

所以球面 Σ 与平面 π 相离.

过点 C 与平面 π 垂直的直线是

$$l:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-8}{2}$$

易求得直线 l 与球面 Σ 交于点 $P(0,2,10)$ 和点 $Q(-2,-2,6)$ 与平面 π 交于点 $R(-3,-4,4)$. 据题意，所求球面有两个，他们分别以 PR 和 QR 为直径，因此其方程为

$$x(x+3)+(y-2)(y+4)+(z-10)(z-4)=0$$

与 $$(x+2)(x+3)+(y+2)(y+4)+(z-6)(z-4)=0$$

即 $$x^2+y^2+z^2+3x+2y-14z+32=0$$

与 $$x^2+y^2+z^2+5x+6y-10z+38=0$$

评注 1° 从本例知，将球面的一般方程(4)化为标准方程(1)，用配方法即可完成.

2° 一般地，若球面 Σ 中心为点 C，半径为 R，点 C 到已知平面 π 的距离 $d(c,\pi)>R(=R,<R)$，则球面 Σ 与平面 π 相离(相切，相交).

3° 若已知球面 Σ 的一条直径端点为 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$，则 Σ 的方程为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$$

这只要设 $P(x,y,z)$ 是球面 Σ 上的动点，由 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$ 便可推得.

例2 求中心在直线 $l:x=4+2t,y=-8-4t,z=2+t$ 上，且过两点 $A(2,-3,6)$，$B(6,3,-2)$ 的球面方程.

解 因所求球面中心在已知直线 l 上，故可设中心为 $C(4+2t,-8-4t,2+t)$，由点 C 与 A,B 等距得

$$(4+2t-2)^2+(-8-4t+3)^2+(2+t-6)^2$$
$$=(4+2t-6)^2+(-8-4t-3)^2+(2+t+2)^2$$

化简整理得 $t=-2$. 于是中心为 $C(0,0,0)$，半径 $R^2=|CA|^2=49$，故所求球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=49$$

评注 本例是根据已知条件先求球面的中心和半径，然后写出球面的方程，此为求球面方程的常用方法之一.

例3 求过点 $(4,1,0,)(2,-3,4),(1,0,0)$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2+5x-20=0$ 直交的球面方程.

解 设 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ 为所求. 因为过已知三点，所以

$$\begin{cases}4A+B+D+17=0\\2A+3B+4C+D+29=0\\A+D+1=0\end{cases}\tag{7}$$

又所求球面与已知球面直交，故

$$5A-2D+40=0\tag{8}$$

由(7),(8)可解得

$$A=-6, B=2, C=-4, D=5$$

故所求球面方程为

$$x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+5=0$$

评注 本例是用待定系数法求球面方程，此为求球面方程常用方法之二.

例4 求与平面 $x+2y-5=0$ 相切，且包含圆 $x^2+y^2=4$，$z=0$ 的球面方程.

解 圆的方程即为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\z=0\end{cases}$$

设所求球面方程为

$$(x^2+y^2+z^2-4)+\lambda z=0$$

它的中心为$(0,0,-\frac{\lambda}{2})$，半径为$\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2+16}$. 根据球面与平面$x+2y-5=0$相切得

$$\frac{|-5|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2+16}$$

解得 $\lambda=\pm2$，故

$$x^2+y^2+z^2\pm2z-4=0$$

为所求球面方程.

评注 本例是用球面束知识求球面方程，此为求球面方程常用方法之三.

2. 求与球面相关的轨迹方程及证明题举例

例5 过原点，且半径为定值 R 的球面交三条坐标轴于 A,B,C 三点，求$\triangle ABC$ 的重心的轨迹方程.

解 设$\triangle ABC$ 的重心为(X,Y,Z)，则 $A(3X,0,0)$，$B(0,3Y,0)$，$C(0,0,3Z)$. 再设点 O,A,B,C 在球面

$$x^2+y^2+z^2+Ex+Fy+Gz=0$$

上，则

$$\frac{1}{4}(E^2+F^2+G^2)=R^2 \tag{9}$$

且

$$\begin{cases}9X^2+3EX=0\\9Y^2+3FY=0\\9Z^2+3GF=0\end{cases} \tag{10}$$

从(9)，(10)消去 E,F,G 得

$$X^2+Y^2+Z^2=\frac{4}{9}R^2$$

因此，$\triangle ABC$ 的重心轨迹方程是

$$x^2+y^2+z^2=\frac{4}{9}R^2$$

例 6 已知球面过定点，且截一条定直线得到的弦长是定值 l，求这样的球面中心的轨迹方程.

解 取定直线为 z 轴建立空间直角坐标系，并使定点在 x 轴上，设其坐标为 $(a,0,0)$. 假定球面交定直线于 $(0,0,z_1)$，$(0,0,z_2)$，球面中心为 (x,y,z)，则据题意

$$\begin{aligned}&(x-a)^2+y^2+z^2\\=&x^2+y^2+(z-z_1)^2\\=&x^2+y^2+(z-z_2)^2\end{aligned}$$

且
$$|z_1-z_2|=l$$

三式消去 z_1，z_2 得所求轨迹方程

$$4z^2-8ax+4a^2-l^2=0$$

例7 点 P 与半径为 R 的球面中心相距为 $m(0\leqslant m<R)$，过 P 任作三条两两互垂的弦. 求证：三弦平方和是定值.

证明 设点 P 是坐标原点，球面方程为

$$(x-m)^2+y^2+z^2=R^2$$

并设过 P 的三条两两互垂的弦的方程为

$$l_i:\begin{cases}x=t_i\cos\alpha_i\\y=t_i\cos\beta_i\\z=t_i\cos\gamma_i\end{cases}$$

其中 $\cos\alpha_i$，$\cos\beta_i$，$\cos\gamma_i$ 是 $l_i(i=1,2,3)$ 的方向余弦，将 l_i 的方程代入球面方程知

$$t_i^2-2(m\cos\alpha_i)t_i+m^2-R^2=0$$

据韦达定量知，球面在直线 l_i 上截得的弦长 a_i 满足

$$\begin{aligned}a_i^2&=(2m\cos\alpha_i)^2-4(m^2-R^2)\\&=4m^2\cos^2\alpha_i-4m^2+4R^2,i=1,2,3\end{aligned}$$

因此三弦平方和为

$$\sum_{i=1}^{3} a_i^2 = 4m^2(\Sigma\cos^2\alpha_i) - 12m^2 + 12R^2$$

$$= 12R^2 - 8m^2 (\text{定值})$$

例8 求证两圆

$$S_1: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{与}$$

$$S_2: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

在同一球面上.

证明 过 S_1 的球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 + \lambda z = 0 \tag{11}$$

过 S_2 的球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2 + \mu(x + y + z - 1) = 0 \tag{12}$$

令(11),(12)的一次项系数及常数项相等得

$$0 = -2 + \mu, \quad 0 = -2 + \mu$$

$$\lambda = \mu, \quad -4 = -2 - \mu \tag{13}$$

从(13)解得 $\lambda = \mu = 2$. 即当 $\lambda = \mu = 2$ 时,(11),(12)表示的球面重合,因此圆 S_1,S_2 在同一球面 $x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 4 = 0$ 上.

评注 若(13)是矛盾方程组,则二圆不可能在同一球面上. 仿照本例,读者可推求一般情况下,两圆在同一求面上的条件.

3. 求圆的中心和半径

例8 求球面

$$\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z - 86 = 0$$

与平面

$$\pi: 2x - 2y - z + 9 = 0$$

的交线圆的中心和半径.

解法一 球面 Σ 的中心是 $C_0(3,-2,1)$，半径 $R_0=10$，过点 C_0 与平面 π 垂直的直线是

$$l:\quad \frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$$

直线 l 与平面 π 的交点即 $C(-1,2,3)$ 便是交线圆的中心，而交线圆半径 $R=\sqrt{R_0^2-|C_0C|^2}=8$.

分析 交线圆的中心和半径分别是以此圆为大圆的球面的中心和半径，因此，问题可转化为求球面的中心和半径. 用球面束知识可解此题.

解法二 过交线圆的球面方程可设为

$$x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z$$
$$-86+\lambda(2x-2y-z+9)=0$$

即

$$x^2+y^2+z^2+(2\lambda-6)x+(4-2\lambda)y$$
$$+(-2-\lambda)z-86+9\lambda=0$$

其中心为 $(3,-\lambda,\lambda-2,1+\frac{\lambda}{2})$，半径 $R=\frac{1}{2}\sqrt{9\lambda^2-72\lambda+400}$.
将中心坐标代入 $2x-2y-z+9=0$ 得 $\lambda=4$，故所求中心为 $(-1,2,3)$，半径 $R=8$.

小结 本节介绍了求球面方程、有关球面的轨迹方程与证明以及求圆的中心和半径的常用方法. 球面是特殊而又重要的曲面，寻求球面的方程以及利用球面的性质求解轨迹方程和证明题是解析几何的基本内容.

习 题 8.4

1. 试求中心是 $(4,5,-2)$，且与球面 $x^2+y^2+z^2-4x-12y+36=0$

相切的球面方程.

2. 一球面中心是(1,3,3),且与 $x^2+y^2+z^2=4$ 交成60°角,试求其方程.

3. 求过三点(4,1,0),(2,−3,4)(1,0,0)且与平面 $2x+2y-z=11$ 相切的球面方程.

4. 求四面体 $x=0, y=0, 5x+12z+3=0, 3x-12y+4z=0$ 的内切球面方程.

5. 求包含圆 $x^2+y^2+z^2=25, x+2y+3z=5$ 且过原点的球面方程.

6. 求与直线 $l_1: \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-5}{0}$ 和 $l_2: \frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+5}{0}$ 均相切的球面中心轨迹方程.

7. 点 $M(\alpha,\beta,\gamma)$ 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 外一定点,过点 M 作平面截球面于一个实圆,求该圆中心的轨迹方程.

8. 求证:两个球面

$$\Sigma_i: x^2+y^2+z^2+A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0 \quad (i=1,2)$$

交线圆所在平面为

$$(A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+(C_1-C_2)z+(D_1-D_2)=0$$

9. 设平面 π 与球面 Σ 相离,求证:以 π 上任一点 P 为中心,P 到 Σ 的切线长为半径的球面过两个定点.

10. 已知两圆所在平面平行,求证:此二圆在同一球面上的充要条件是中心连线与二圆所在平面垂直.

11. 求圆

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-4y-3=0 \\ x^2+y^2+z^2-6x-8z+17=0 \end{cases}$$

的中心和半径.

§8.5 柱 面

一、基本内容

1° 空间内与一定曲线 l 相交的一族平行直线产生的曲面

叫柱面，曲线 l 叫柱面的准线，平行线的方向叫柱面的方向，平行线中的每一条叫柱面的母线.

2° 在空间坐标系下，曲面的方程如不含某个变量，则此曲面为母线平行于与这个变量同名的坐标轴的柱面.

如方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$y^2=2px$ 均不含 z，它们表示母线平行于 z 轴的柱面，分别叫椭圆柱面，双曲柱面和抛物柱面；因方程均是二次的，故统称二次柱面.

3° 以曲线 l：$x=x(u)$，$y=y(u)$，$z=z(u)$ $(a\leqslant u\leqslant b)$ 为准线，$X:Y:Z$ 为方向的柱面的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(u) + Xv \\ y = y(u) + Yv \\ z = z(u) + Zv \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a \leqslant u \leqslant b \\ -\infty < v < +\infty \end{pmatrix} \tag{1}$$

4° 以曲线 l 为准线，平面 π 的法方向为方向的柱面叫曲线 l 对平面 π 的射影柱面，它与平面 π 的交线叫曲线 l 在 π 上的射影.

二、常用方法及应用举例

已知柱面的准线是

$$l:\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

方向是 $X:Y:Z$，那么求柱面方程的常用方法是：设 (x_0,y_0,z_0) 是准线上任一点，柱面过 (x_0,y_0,z_0) 的母线方程为

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z} \tag{2}$$

其中 x_0,y_0,z_0 满足

$$\begin{cases} F_1(x_0,y_0,z_0) = 0 \\ F_2(x_0,y_0,z_0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

由曲线产生曲面知识知，从(2)，(3)消去参数 x_0, y_0, z_0 就得柱面的方程. 比如

例1 已知柱面准线方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

方向为1:1:(−1)，试求其方程.

解 准线方程可化为

$$\begin{cases} 4(x^2 + z^2) = 7 \\ 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

设 (x_0, y_0, z_0) 是准线上任一点，过该点的母线方程为

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{1} \quad (4)$$

而

$$\begin{cases} 4(x_0^2 + z_0^2) = 7 \\ 2y_0 - 3 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

从(4)，(5)消去 x_0, y_0, z_0 便得所求柱面方程

$$(2x - 2y + 3)^2 + (2y + 2z - 3)^2 = 7$$

评注 在采用上述方法求柱面方程时，其准线和方向必须明显，若不明显，则应先求准线和方向.

例2 求外切于两个球面 $x^2+y^2+z^2=4$，$x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$ 的柱面方程.

分析 此题中所求柱面的准线和方向尚不明显，应先求准线和方向. 所求柱面母线应同时与给定二球面相切，故球心连线方向是柱面方向，而准线可取作过一球面中心且与连心线垂直的平面和该球面的交线.

解 现已知球面中心为(0,0,0)，(0,2,1)，故所求柱面方向为0:2:1，而准线可取为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\2y+z=0\end{cases}$$

由

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{0}=\dfrac{y-y_0}{2}=\dfrac{z-z_0}{1}\\x_0^2+y_0^2+z_0^2=4\\2y_0+z_0=0\end{cases}$$

消去 x_0,y_0,z_0 得所求柱面方程

$$5x^2+y^2+4z^2-4yz-20=0$$

在求圆柱面方程时，除用前述常用方法外，还可根据圆柱面的几何特征去求，请看

例3 已知圆柱面的轴是 $l: x+y=0, x-y+z=0$，并且过点 $M_0(2,2,3)$，试求其方程.

解法一 根据圆柱面上的点到其轴线的距离相等的几何特征求其方程. 轴的方程为 $l: \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$，设 $M(x,y,z)$ 是圆柱面上任一点，则

$$d(M,l)=d(M_0,l)$$

代入坐标有

$$\frac{|\{x,y,z\}\times\{-1,1,2\}|}{|\{-1,1,2\}|}=\frac{|\{2,2,3\}\times\{-1,1,2\}|}{|\{-1,1,2\}|}$$

化简整理得

$$5x^2+5y^2+2z^2+2xy+4xz-4yz-66=0 \quad (6)$$

解法二 利用坐标变换求圆柱面方程. 圆柱面的半径 $R=d(M_0,l)=\sqrt{11}$. 以直线 l 为 z' 轴作坐标变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x - y + z) \\ z' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(x - y - 2z) \end{cases}$$

则圆柱面有新方程

$$x'^2 + y'^2 = 11$$

将变换式代入就得圆柱面在原坐标系下的方程

$$3(x + y)^2 + 2(x - y + z)^2 = 66$$

化简整理即为(6).

解法三 利用旋转面知识求圆柱面方程. 所求圆柱面轴为 $l: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$，过 M_0 的母线为 $m: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{2}$. 直线 m 绕 l 旋转即生成所求圆柱面. 故据旋转面知识，从

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ -(x - x_0) + (y - y_0) + 2(z - z_0) = 0 \\ \dfrac{x_0 - 2}{-1} = \dfrac{y_0 - 2}{1} = \dfrac{z_0 - 3}{2} \end{cases}$$

消去 x_0, y_0, z_0 便得圆柱面方程(6).

评注 上例中求圆柱面方程的几种解法，均不需要先去求准线方程.

例4 求以曲线 $l: x^2 + y^2 + z^2 = 1, 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$ 为准线，$-1:0:1$ 为方向的柱面方程.

解 准线 l 方程可化为 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ 其参数方程为 $x = \cos\alpha, y = \sin\alpha, z = 0\ (0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi)$，据(1)，所求柱面参数方程为.

$$\begin{cases} x = \cos\alpha - t \\ y = \sin\alpha \\ z = t \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \leqslant \alpha < 2\pi \\ -\infty < t < +\infty \end{pmatrix}$$

消去 α, t 得柱面的普通方程

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 1 = 0$$

评注 若柱面的准线方程较易化为参数方程时，则可先写出柱面的参数方程，然后消去参数而得普通方程，此法往往比较简捷.

例5 已知柱面方向是1:0:1，母线是曲面 $x^2+2xy+z+1=0$的切线，试求其方程.

分析 本例中所求柱面准线方程不易求得，故难以采用本节开始介绍的方法. 但知柱面的母线与一二次曲面相切，故可利用一元二次言程的判别式求解本题.

解 设任一母线方程为$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{1}$，其中$(x_0, y_0, z_0)$是切点. 将 $x_0=x-t, y_0=y, z_0=z-t$ 代入 $x^2+2xy+z+1=0$并整理有

$$t^2 - (2x + 2y + 1)t + (x^2 + 2xy + z + 1) = 0$$

由于(x_0, y_0, z_0)是切点，故此方程有重根，所以

$$\Delta = (2x + 2y + 1)^2 - 4(x^2 + 2xy + z + 1) = 0$$

整理得曲面方程

$$4y^2 + 4x + 4y - 4z - 3 = 0$$

评注 一般地，当柱面方向给定，又知母线与某一二次曲面相切时，均可采用本例中介绍的方法.

求曲线对某平面的射影柱面，即是求以此曲线为准线，平面的法方向为方向的柱面，因此，可利用前面介绍的方法去

求，而求曲线对坐标面的射影柱面方程.又可采用特殊的消元法.

例 6 求曲线 $x^2+2y^2+z^2=1, x^2+z^2=y$ 对 xoy 面的射影柱面方程.

解 从曲线方程消去 z 得

$$2y^2+y-1=0$$

即

$$y=\frac{1}{2} \text{ 或 } y=-1$$

曲线上的点 (x,y,z) 满足 $y=x^2+z^2\geqslant 0$，故取

$$y=\frac{1}{2}$$

将 $y=\frac{1}{2}$ 代入 $x^2+2y^2+z^2=1$ 得

$$x^2+z^2=\frac{1}{2}$$

故曲线上的点满足 $|x|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，于是所求射影柱面方程是

$$y=\frac{1}{2}\left(|x|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

评注 从本例可知，求曲线对坐标面的射影柱面，不能草率地从方程消去某一变量就算得到了，要注意有没有附加的限制条件.并且，有的曲线方程不一定能消去指定的某一变量.

例 7 化简曲线方程

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-3z-6=0 \\ 2x^2-3y^2+12z+19=0 \end{cases}$$

解 从曲线方程消去 x 而得曲线对 yoz 面的射影柱面方程

$$y^2=3z+5$$

同样，消去 z 得曲线对 xoy 面的射影柱面

$$2x^2 + y^2 = 1$$

因此，曲线方程可简化为

$$\begin{cases} y^2 = 3z + 5 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

例8 求证：方程 $F(x,y,z) \equiv 4x^2 + 25y^2 + z^2 + 4xz - 20x - 10z = 0$ 表示以1:0:(−2)为方向的柱面.

证明 设(x_0, y_0, z_0)是曲面上任一点，故 $F(x_0, y_0, z_0)$. 作直线 $x = x_0 + t, y = y_0, z = z_0 - 2t$，代入曲面方程并整理得关于 t 的恒等式

$$0t^2 + 0t + 0 \equiv 0$$

所以整条直线在曲面上. 由(x_0, y_0, z_0)的任意性知曲面为一族以1:0:(−2)为方向的平行直线组成，故是柱面，且以1:0:(−2)为方向.

小结 本节介绍了求柱面方程的若干常用方法. 若已知柱面的准线和方向，可采用求曲线产生曲面的一般方法求方程；对于圆柱面，除一般方法外，还可根据圆柱面的几何特征采用特殊方法求方程；必须明白，并不一定要先求得柱面的准线才能求方程. ♠

习 题 8.5

1. 求证：以 $F(x,y) = 0, z = 0$ 为准线，$l:m:n$ 为方向($n \neq 0$)的柱面方程为

$$F(x - \frac{l}{n}z, y - \frac{m}{n}z) = 0$$

2. 求以曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \\ x^2 + y^2 = 3az \end{cases}$$

($a > 0$)为准线，母线平行于 z 轴的柱面方程.

3. 求以圆

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=36\\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25\end{cases}$$

为准线的圆柱面方程.

4. 已知柱面方向是$-2:1:2$,母线与球面$x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z=1$相切,试至少用三种方法求柱面的方程.

5. 求曲面$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{10}+\frac{z^2}{9}=1$的外切圆柱面方程.

6. 已知两个平面$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0(i=1,2)$相交于直线$l$,求证:方程$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)^2+(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)^2=R^2$表示一个母线平行于直线$l$的柱面.

7. 求曲线$y=x^2,z=x$对$z+y=0$的射影柱面.

8. 已知曲线$2x^2+3y^2+z^2=1,y+x=0$. 求:(1) 对xoy面的射影柱面;(2) 在平面$x+y+2z+5=0$上的射影.

9. 求以曲线$\vec{r}=\{t,13t^2,4t\}$为准线,以$3:1:(-1)$为方向的柱面方程.

§8.6 锥　面

一、基本内容

1° 空间内过一定点P与一定曲线l相交的直线族产生的曲面叫锥面,定点P叫锥面的顶点,定曲线l叫锥面的准线,直线族中每一条都叫锥面的母线.

2° 一个关于$x-x_0,y-y_0,z-z_0$的齐次方程表示顶点在(x_0,y_0,z_0)的锥面;反过来,一个以(x_0,y_0,z_0)为顶点的锥面可用关于$x-x_0,y-y_0,z-z_0$的齐次方程来表示.

3° 方程$ax^2+by^2+cz^2=0(abc\neq0)$表示以原点为顶点,坐标轴为对称轴的二次锥面,特别地,比如$a=b,ac<0$时,$ax^2+by^2+cz^2=0$表示以原点为顶点,z轴为轴,半顶角α满足

$\mathrm{tg}^2 a=-\frac{c}{a}$的圆锥面；反之，以原点为顶点，$z$ 轴为轴，半顶角为 a 的圆锥面方程为 $x^2+y^2-z^2\mathrm{tg}^2\alpha=0$.

4° 以 $P(x_0,y_0,z_0)$为顶点，曲线 $L: x=x(u), y=y(u), z=z(u)(a\leqslant u\leqslant b)$为准线的锥面参数方程为

$$\begin{cases} x=vx(u)+x_0(1-v) \\ y=vy(u)+y_0(1-v) \\ z=vz(u)+z_0(1-v) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a\leqslant u\leqslant b \\ -\infty<v<+\infty \end{pmatrix} \tag{1}$$

二、常用方法及应用举例

已知锥面的顶点是 $P(a,b,c)$，准线是

$$l:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

那么求锥面方程的常用方法是：设(x_0,y_0,z_0)是准线 l 上任一点，过该点的母线方程为

$$\frac{x-a}{x_0-a}=\frac{y-b}{y_0-b}=\frac{z-c}{z_0-c} \tag{2}$$

其参数 x_0,y_0,z_0满足

$$\begin{cases} F_1(x_0,y_0,z_0)=0 \\ F_2(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases} \tag{3}$$

从(2)，(3)消去 x_0,y_0,z_0即得锥面方程.

例1 将点 $P(5,0,0)$投射到曲线 $l: x^2+2y^2=1, x+2y-z=0$上各点，求投射直线产生的曲面方程.

解 所求曲面是以点 $P(5,0,0)$为顶点，曲线 l 为准线的锥面. 设(x_0,y_0,z_2)是 l 上任一点，锥面过此点的母线方程为

$$\frac{x-5}{x_0-5}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0} \tag{4}$$

又

$$\begin{cases} x_0^2 + 2y_0^2 = 1 \\ x_0 + 2y_0 - z_0 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

从(4),(5)消去 x_0, y_0, z_0 便得所求曲面方程

$$(x-5)^2 - 146y^2 - 24z^2 + 4(x-5)y - 2(x-5)z + 96yz = 0$$

评注 用上述方法求锥面方程,其顶点坐标及准线方程都应是明显的,若不然,则应先求顶点和准线.

在求圆锥面方程时,除用上述方法外,还可考虑利用圆锥面的几何特征去求,请看

例2 求以 $A(5,0,0)$ 为顶点,母线与球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 相切的圆锥面方程.

解法一 以顶点 A 为中心,点 A 到已知球面的切线长 $=\sqrt{5^2-3^2}=4$ 为半径的球面与已知球的交线

$$\begin{cases} (x-5)^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = \left(\dfrac{12}{5}\right)^2 \\ x = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

可作为圆锥面的准线,故从

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{x_0-5} = \dfrac{y}{y_0} = \dfrac{z}{z_0} \\ y_0^2 + z_0^2 = \left(\dfrac{12}{5}\right)^2 \\ x_0 = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

消去 x_0, y_0, z_0 便得所求圆锥面的方程

$$9x^2-16y^2-16z^2-90x+225=0 \tag{6}$$

解法二 易见所求圆锥面顶点是$A(5,0,0)$，轴为x轴，半顶角α满足$\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{4}$，因此直接有方程

$$-\left(\frac{3}{4}\right)^2(x-5)^2+y^2+z^2=0$$

化简整理即得(6).

解法三 易见所求圆锥面半顶角θ满足$\cos\theta=\frac{4}{5}$，轴方向是$\vec{i}$，设$P(x,y,z)$是圆锥面上异于顶点A的任一点，则

$$\cos(\overrightarrow{AP},\vec{i})=\pm\frac{4}{5}$$

代入坐标有

$$\frac{x-5}{\sqrt{(x-5)^2+y^2+z^2}}=\pm\frac{4}{5}$$

化简整理得(6)，又顶点$A(5,0,0)$满足(6)，故(6)为所求圆锥面方程.

解法四 设任一母线与球面$x^2+y^2+z^2=9$相切于点(x_0,y_0,z_0)，则母线方程为

$$\frac{x-5}{x_0-5}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}$$

于是

$$x_0=5+t(x-5),y_0=yt,z_0=zt \tag{7}$$

将(7)代入$x^2+y^2+z^2=9$并整理有

$$[(x-5)^2+y^2+z^2]t^2+10(x-5)t+16=0$$

因(x_0,y_0,z_0)是切点，所以上方程有重根，故

$$\Delta=25(x-5)^2-16[(x-5)^2+y^2+z^2]=0$$

整理便得(6).

评注 从本例可见，巧妙地利用圆锥面的几何特征求其

方程，有时是十分简捷的.

一般地，从一点向某二次曲面 $F(x,y,z)=0$所引切线产生的曲面叫该二次曲面的切锥面，求二次曲面的切锥面方程常采用例2中介绍的解法四.

例3 求原点为项点，$x^2-2z+1=0$，$y-z+1=0$为准线的锥面方程.

解 准线的参数方程是

$$\begin{cases} x = u \\ y = \dfrac{1}{2}(u^2 - 1) \\ z = \dfrac{1}{2}(u^2 + 1) \end{cases}$$

据式(1)可得锥面的参数方程

$$\begin{cases} x = uv \\ y = \dfrac{1}{2}(u^2 - 1)v \\ z = \dfrac{1}{2}(u^2 + 1)v \end{cases} \qquad (-\infty < u,v < +\infty)$$

消去 u,v 便得曲面的普通方程

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

评注 若锥面的准线方程较易化为参数式，则可直接利用(1)写出锥面的参数方程，然后消去参数便得曲面的普通方程.

例4 平面$2x+y-z=0$与二次锥面$4x^2-y^2+3z^2=0$交于一对直线，求这对直线的方程.

解法一 由

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 + 3z^2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

消去 z 得

$$8x^2 + 6xy + y^2 = 0$$

分解有

$$(2x + y)(4x + y) = 0$$

因此$2x+y=0$，$4x+y=0$分别是两直线对 xoy 面的射影平面，它们分别通过两直线，故

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} 4x + y = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

为所求直线的方程.

解法二 由

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 + 3z^2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

令 $y=1$可求得两个解$(-\frac{1}{2},1,0)$，$(-\frac{1}{4},1,\frac{1}{2})$，此二解表示的点分别与锥面顶点$(0,0,0)$的连线

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}, \frac{x}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}$$

就是所求直线的方程.

习 题 8.6

1. 已知 $A(3,-1,-2)$处有一点光源，求曲线 $x^2+y^2-z^2=1$，$x-y+z=0$在 xoy 面上的影子的方程.

2. 求以原点为顶点，以平面 $x+y+z=a$ 上与各坐标面都相切的圆为准线的锥面方程.

3. 求曲面 $x^2+y^2=2az$ 的切锥面方程.已知它的顶点的锥面方程，已知它的顶点为$(0,5,0)$.

4. 求以 $\vec{r}=(\{t,t^2,t\}$为准线，$A(1,5,0)$为顶点的锥面方程.

5. 已知圆锥面顶点为 $A(2,1,0)$，轴与 y 轴平行，又过点 $B(2,2,1)$，

试求其方程.

6. 已知某圆锥面与球面 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$ 相切于平面 $x+y+z=1$ 上的圆,试求其方程.

7. 求两个球面 $x^2+y^2+z^2=9$,$(x-5)^2+y^2+z^2=1$ 的公共切锥面方程.

8. 求直线对

$$\begin{cases}20x^2+7y^2-108z^2=0\\10x+7y-6z=0\end{cases}$$

的交角.

§8.7 旋转曲面

一、基本内容

1° 空间内,一条曲线 Γ 绕着定直线 l 旋转一周产生的曲面叫旋转曲面,曲线 Γ 和直线 l 分别叫旋转曲面的母线和轴;以轴为边界的半平面与曲面的交线叫旋转曲面的经线,母线上任一点画出的轨迹是圆,叫旋转曲面的纬圆.

2° 以坐标平面内的曲线为母线,该坐标平面内的坐标轴为轴的旋转曲面方程具有特殊形式. 比如以 $F(y,z)=0$, $x=0$ 为母线,z 轴为轴的旋转曲面方程是 $F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$,其余类似.

3° 给定方程 $F(x,y,z)=0$,若该方程左端是两个变量平方和的平方根与第三个变量的函数,则必表示一个旋转曲面.

4° 若旋转曲面母线参数方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$,而轴为坐标轴,比如 z 轴,则旋转曲面参数方程是

$$\begin{cases} x = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\cos\theta \\ y = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\sin\theta \\ z = z(t) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a \leqslant t \leqslant b \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{pmatrix} \qquad (1)$$

其余类似.

二、常用方法及应用举例

已知旋转曲面母线为

$$\Gamma: \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

轴为 $\frac{x-a}{X} = \frac{y-b}{Y} = \frac{z-c}{Z}$，则求旋转曲面方程的方法是：设 (x_0, y_0, z_0) 是母线上任一点，过此点的纬圆方程为

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \\ = (x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 + (z_0-c)^2 \\ X(x-x_0) + Y(y-y_0) + Z(z-z_0) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

其中参数 x_0, y_0, z_0 满足

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ F_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

从(2)，(3)消去 x_0, y_0, z_0 就得旋转曲面的方程.

例1 求曲线 $x^2=y, x+z=0$ 绕着 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ 旋转生成的曲面方程.

解 设 (x_0, y_0, z_0) 是母线 $x^2=y, x+z=0$ 上任一点，则过该点的纬圆方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ (x-x_0) + 2(y-y_0) + (z-z_0) = 0 \end{cases}$$

又

$$\begin{cases} x_0^2 = y_0 \\ x_0 + z_0 = 0 \end{cases}$$

从以上四式消去 x_0, y_0, z_0 得所求曲面方程

$$3x^2 + 3z^2 - 4xy - 2xz - 4yz - 4x - 8y - 4z = 0$$

例2 已知圆锥面轴是 $x = y = z$，一条母线是 $2x = 3y = -5z$，试求其方程.

解 该圆锥面可看作是 $2x = 3y = -5z$ 为母线，$x = y = z$ 为旋转轴的旋转曲面，故由

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ (x - x_0) + (y - y_0) + (z - z_0) = 0 \\ 2x_0 = 3y_0 = -5z_0 \end{cases}$$

消去 x_0, y_0, z_0 得圆锥面方程为

$$xy + yz + zx = 0$$

对于以坐标平面内的曲线为母线，该坐标面内的坐标轴为轴的旋转曲面方程可代公式求得，比如

例3 求曲线

$$\begin{cases} 4(x-1)^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} \tag{4}$$

绕 x 轴旋转生成的旋转曲面方程.

解 旋转曲面母线可化为

$$\begin{cases} 4(x-1)^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} \tag{5}$$

因母线在 xoy 面内，旋转轴为 x 轴，故用 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 代入式(5)中第一个方程的 y，得

$$4(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

这就是所求曲面的方程.

评注 1° 上例中，若不先将(4)化为(5)就直接用$\pm\sqrt{y^2+z^2}$代的入(4)中第一个方程的 y 而得

$$4(x-1)^2+y^2+3z^2=1$$

便是错误的结果，因(4)还不是

$$\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$$

的形式.

2° 曲线(4)绕 z 轴旋转生成的旋转曲面不能像例3那样去代换求得方程. 因 z 轴不是曲线(4)所在坐标面内的坐标轴.

例4 求曲线

$$\begin{cases}x+yz=0\\ z+y=0\end{cases}$$

绕 x 轴旋转生成的曲面方程.

解 曲线的参数方程为 $x=u^2, y=-u, z=u$，根据式(1)得曲面的参数方程为

$$\begin{cases}x=u^2\\ y=\sqrt{u^2+u^2}\cos\theta\\ z=\sqrt{u^2+u^2}\sin\theta\end{cases}\quad\left(\begin{matrix}-\infty<u<+\infty\\ 0\leqslant\theta<2\pi\end{matrix}\right)$$

消去 u,θ 得曲面的普通方程

$$y^2+z^2=2x$$

例5 验证曲面

$$F(x,y,z)\equiv(x^2+y^2+z^2)^2-16(x^2+z^2)=0$$

是一个旋转曲面.

证明 由于 $F(x,y,z)\equiv h(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)$，这里 $h(x,y)=(x^2+y^2)^2-16x^2$，所以 $F(x,y,z)=0$表示一个旋转曲面，它可看作是曲线.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

绕 y 轴旋转产生的.

小结 从这几节看到，柱面是由一族平行直线生成的；锥面是由一族共点直线生成的；旋转曲面是由一族纬圆生成的，在求这些曲面方程时，所用方法有一种是统一的，即先写出含参数 x_0, y_0, z_0 的母线族或纬圆族方程

$$\begin{cases} H_1(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = 0 \\ H_2(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = 0 \end{cases}$$

再根据曲面的生成规律，写出三个参数 x_0, y_0, z_0 应满足的二个关系式

$$\begin{cases} F_1(x_0,y_0,z_0) = 0 \\ F_2(x_0,y_0,z_0) = 0 \end{cases}$$

然后由上面四式消去 x_0, y_0, z_0 就得曲面的方程.

习 题 8.7

1. 求抛物线 $z^2 = 2py, x = 0$ 绕 z 轴旋转生成的曲面方程.

2. 求直线 $\frac{x-a}{X} = \frac{y-b}{Y} = \frac{z-c}{Z}$ 绕 x 轴旋转所得的旋转曲面方程.

3. 试求曲线 $2x^2 + y^2 = z, x = 2y$ 分别绕三条坐标轴旋转产生的曲面方程.

4. 一圆锥面的轴是直线 $l: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$，顶点为 $A(0,0,1)$，又过点 $(2,1,0)$，试求其方程.

5. 求曲线

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 + 3xz + 9z - 36 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

绕三条坐标轴旋转产生的曲面方程.

6. 求证：曲面

$$\vec{r} = \{a(\cos u + \cos v), a(\sin u + \sin v), b(u - v)\}$$

是旋转曲面，这里 $a, b \neq 0$ 且 a, b 是常数.

7. 求曲线 $x = z^2, x^2 + y^2 = 1$ 绕直线 $x = 2t, y = 0, z = 3t$ 旋转生成的旋转曲面方程.

第9章　二次曲面

§9.1　五种二次曲面

1. 椭球面

定义9.1.1　在直角坐标系下,由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (9.1—1)$$

所表示的曲面叫椭球面,或称椭圆面,方程(9.1—1)为椭球面的标准方程,其中 a,b,c 为任意的正常数.

在方程(9.1—1)中,通常假定 $a\geqslant b\geqslant c$,则 a,b,c 分别叫做椭球面的长半轴,中长轴和短半轴.椭球面(9.1—1)与三坐标轴的交点(如图9—1所示)分别为$(\pm a,0,0)$,$(0,\pm b,0)$,$(0,0,\pm c)$,这六个点叫做椭球面的顶点.

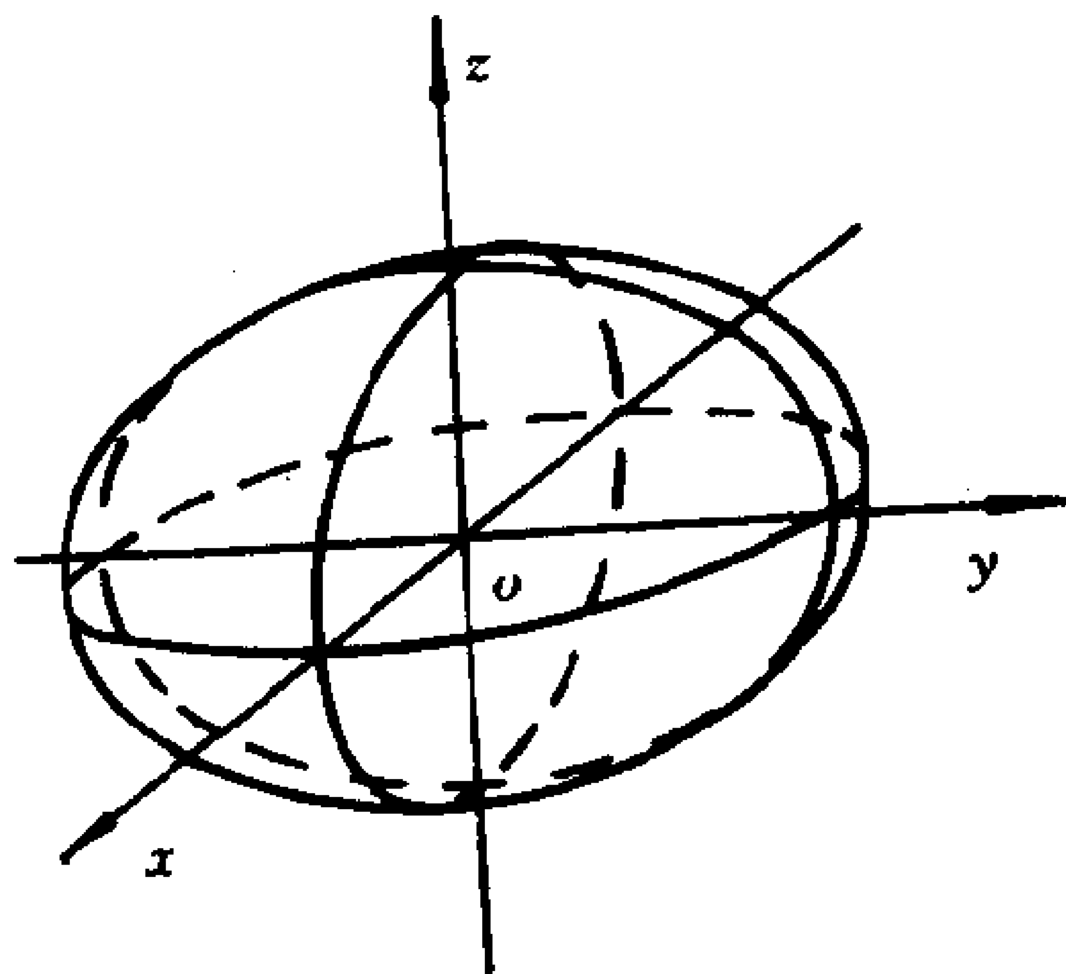


图　9—1

2. 单叶双曲面

定义9.1.2　在直角坐标系下,由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (9.1—2)$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面，方程(9.1—2)叫做单叶双曲面的标准方程，其中 a,b,c 为任意的正常数.

如图9—2所示，单叶双曲面(9.1—2)与 z 轴不相交，与 x 轴、y 轴分别交于点$(\pm a,0,0)(0,\pm b,0)$这四个点叫做单叶双曲面的顶点.

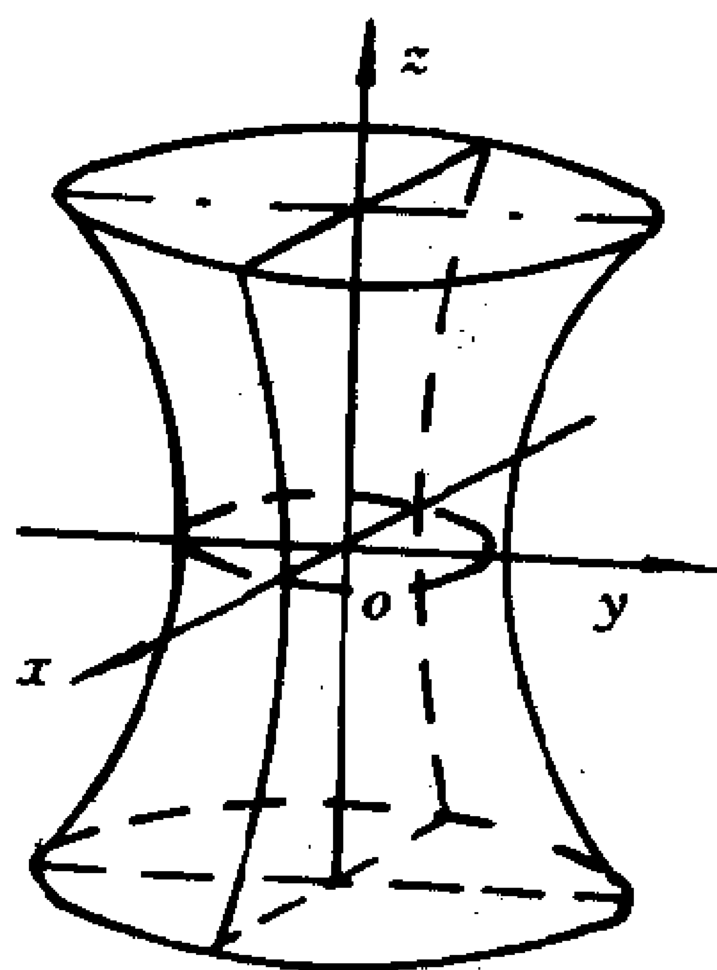


图 9—2

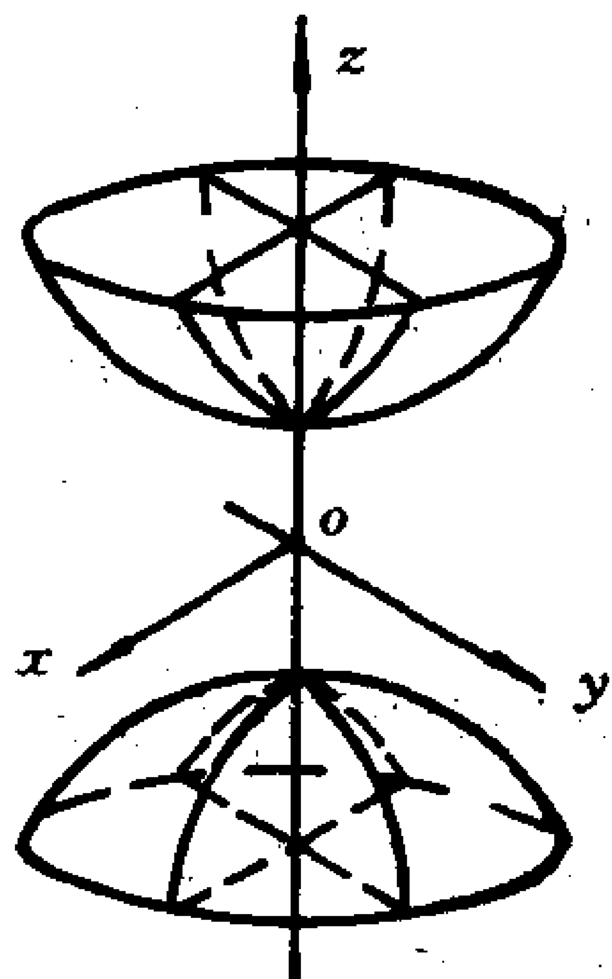


图 9—3

3. 双叶双曲面

定义9.1.3 在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{9.1—3}$$

所表示的图形，叫做双叶双曲面，方程(9.1—3)叫做双叶双曲面的标准方程，其中 a,b,c 为任意的正常数.

如图9—3所示，双叶双曲面(9.1—3)与 x 轴、y 轴都不相交，只与 z 轴相交于两点$(0,0,\pm c)$，这两点叫做双叶双曲面(9.1—3)的顶点.

4. 椭圆抛物面

定义9.1.4 在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \tag{9.1—4}$$

所表示的曲面叫做椭圆抛物面，方程(9.1—4)，叫做椭圆的抛物面的标准方程，其中 a,b 是任意的正常数.

如图9—4所示，椭圆抛物面(9.1—4)与对称轴交于点(0,0,0)，这点叫做椭圆抛物面的顶点.

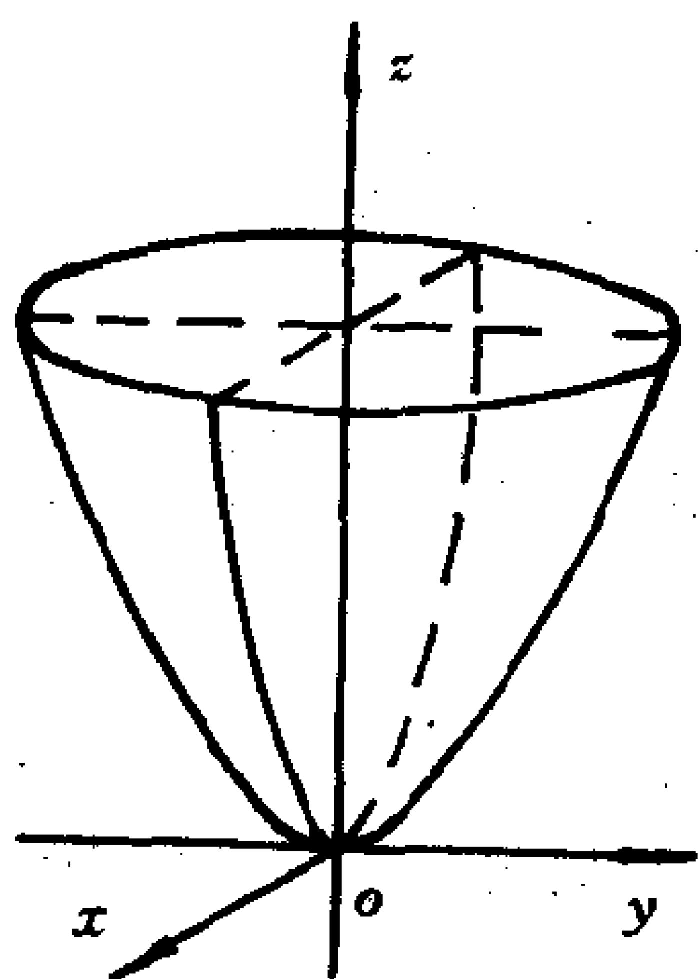


图 9—4

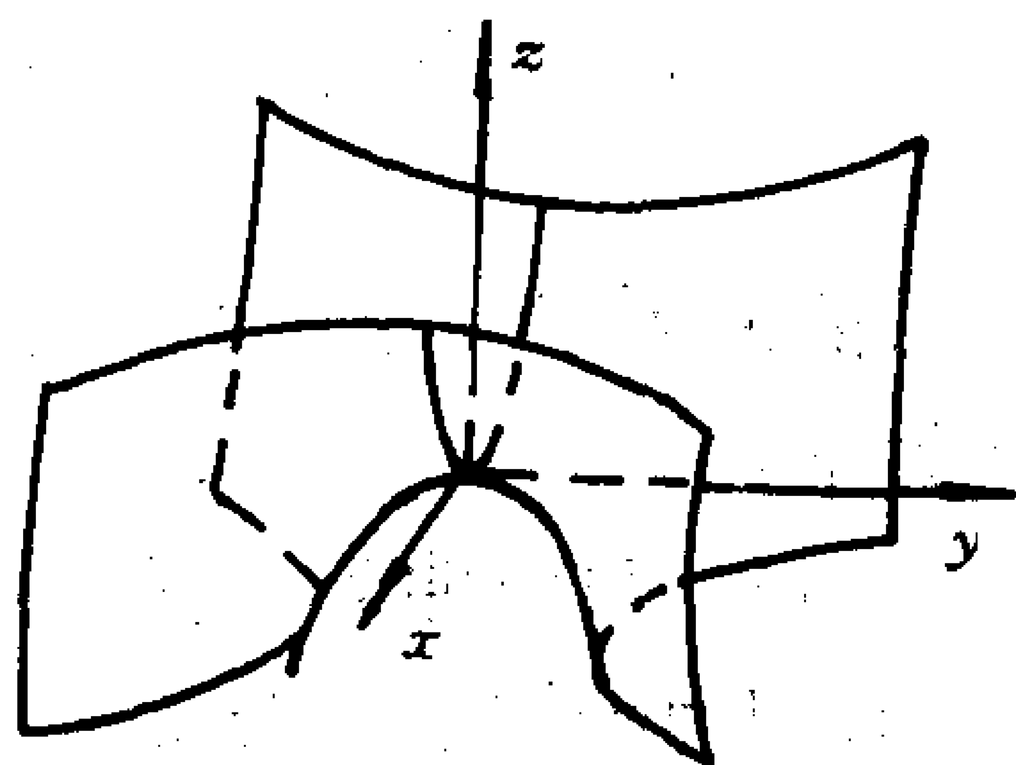


图 9—5

5. 双曲抛物面

定义9.1.5 在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \qquad (9.1—5)$$

所表示的曲面叫做双曲抛物面，方程(9.1—5)叫做双曲抛物面的标准方程，其中 a,b 为任意的正常数(因其形状象马鞍形，故也称为马鞍面，如图9—5所示).

习 题 9.1

1. 指出下列曲面的名称

(1) $\frac{x^2}{4}-y^2-z^2=1$；

(2) $\frac{x^2}{4}-y^2-z^2=-1$；　　(3) $x^2+2y^2+3z^2=1$

(4) $x^2+\frac{y^2}{4}=2z$；　　　(5) $x^2-\frac{y^2}{4}=-2z$.

2. 说明下列曲面的形状

(1) $9x^2+16y^2+25z^2=1$；　　　(2) $4x^2-9y^2-16z^2=25$；

(3) $4x^2-9y^2-16z^2=-25$；　　　(4) $4x^2+9y^2-16z^2=25$；

(5) $4x^2+9y^2-16z^2=-25$；　　　(6) $x^2-y^2=2z$；

(7) $y^2+z^2=2x$；　　　(8) $z^2-4y^2=-2x$.

§9.2　二次曲面的对称性

曲面关于一个坐标面或一个坐标轴或原点对称，其判别法如下：

(1) 如果将曲面方程中一个变数的符号改变，而方程不受影响，则曲面必关于该变数等于零的坐标面对称. 例如，将方程 $F(x,y,z)=0$ 中的 z 换成 $-z$，而方程不变，即方程 $F(x,y,-z)=0$ 与方程 $F(x,y,z)=0$ 相同，这说明如果点 (x,y,z) 在曲面上，那么该点关于坐标面 oxy 面的对称点 $(x,y,-z)$ 也在曲面上，也就是该方程所表示的曲面关于坐标面 oxy 面对称.

(2) 如果将曲面方程中两个变数的符号同时改变而方程不受影响，则此曲面必关于其余一变数所对应的坐标轴对称，例如，将方程 $F(x,y,z)=0$ 中 y,z 换成 $-y,-z$，方程不变，即方程 $F(x,-y,-z)=0$ 与方程 $F(x,y,z)=0$ 相同，这说明如果点 (x,y,z) 在曲面上，那么它关于 x 轴的对称点 $(x,-y,-z)$ 也在曲面上，也就是该曲面关于 x 轴对称.

(3) 如果将曲面方程中三个变数的符号同时改变，而方程不受影响，则此曲面关于原点对称. 即方程 $F(-x,-y,-z)=0$ 与方程 $F(x,y,z)=0$ 相同，说明如果点 (x,y,z) 在曲面上，那么它关于原点的对称点 $(-x,-y,-z)$ 也在曲面上，因

此曲面关于原点对称.

用上述方法讨论五种二次曲面的对称性如下：

表9—1

曲面		方程	对称性
有心二次曲面	椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	关于三坐标平面、三坐标轴及坐标原点均对称.
	单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	同　上
	双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	同　上
无心二次曲面	椭圆抛物面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$	关于 xoz 与 yoz 坐标面对称，也关于 z 轴对称
	双曲抛物面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	同　上

习　题　9.2

1. 证明椭圆抛物面 $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=2x$ 关于 oxy 面及 oxz 面皆对称，且关于 x 轴对称.

2. 已知双曲抛物面的顶点在原点，对称面为 oxz 面及 oyz 面，且过点(1,0,1)及(1,1,0)，求这个双曲抛物面的方程.

§9.3　二次曲面与坐标面的交线(截部)

为了概括地了解曲面的形状，求出曲面与三坐标面的交线方程是非常重要的. 因为从曲面与三坐标面的交线(也称截

部)的形状就可想象出曲面的大致形态，并可画出曲面的大致图形，其具体做法是：在曲面方程 $F(x,y,z)=0$中，依次令 $x=0,y=0,z=0$，即得曲面与各坐标面的交线的方程. 用此方法分别求出五种二次曲面与三坐标面的交线方程，并列表如下(见表9—2、9—3).

表9—2

曲面	曲面方程	与 oyz 面的交线
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\x=0\end{cases}$ 椭圆
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\x=0\end{cases}$ 双曲线
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\\x=0\end{cases}$ 双曲线
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$	$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}=2z\\x=0\end{cases}$ 抛物线
双曲抛物面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}=-2z\\x=0\end{cases}$ 抛物线

表9—3

曲　　面	与 ozx 的交线	与 oxy 面的交线
椭球面	$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$ 椭圆	$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ 椭圆
单叶双曲面	$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$ 双曲线	$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ 椭圆
双叶双曲面	$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$ 双曲线	无交线
椭圆抛物面	$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}=2z\\ y=0\end{cases}$ 抛物线	$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0\\ z=0\end{cases}$ 即点(0,0,0)
双曲抛物面	$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}=2z\\ y=0\end{cases}$ 抛物线	$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\\ z=0\end{cases}$ 二相交直线

习　题　9.3

1. 求椭球面的标准方程，使它的两个截部分别是

$$\begin{cases}\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1\\ x=0\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1\\ y=0\end{cases}$$

2. 求椭球面的标准方程，使它通过椭圆

$$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1\\ z=0\end{cases} \qquad 与点 P_0(1,2,\sqrt{23})$$

3. 求单叶双曲面$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$的腰椭圆方程.

4. 已知椭圆抛物面的顶点在原点，对称面为 oxz 面与 oyz 面，且过点 $(1,2,6)$ 和 $(\frac{1}{3},-1,1)$，求这个椭圆抛物面的方程.

§9.4 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线

由一族直线组成的曲面叫直纹面，这个定义包含两个方面的含义，一是族中每一条直线都在曲面上，也就是族中任意一条直线上的任意一点都在曲面上，二是曲面上的每一点都在族中的一条直线上，这样的直线族叫做直纹面的一个直母线族.

柱面、锥面都是由直母线构成的，无疑它们都是直纹曲面.在本章所讨论的五种二次曲面中，单叶双曲面和双曲抛物面也是直纹曲面.

掌握证明一个二次曲面是直纹面的方法是很重要的，下面把证明单叶双曲面是直纹面的思路与步骤概括一下：

1° 把单叶双曲面的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

改写为等式两端都是平方差的形式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2} \tag{2}$$

2° 然后把两端分解因式

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3}$$

3° 引入参数

$$令\ u=\frac{1-\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}\ 或\ v=\frac{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}{1+\frac{y}{b}}$$

分别代入(3)式，得直线族

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=u(1+\frac{y}{b})\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{u}(1-\frac{y}{b})\end{cases}\tag{4}$$

或

$$\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=v(1+\frac{y}{b})\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{v}(1-\frac{y}{b})\end{cases}\tag{5}$$

其中(4)式表示的直线族称为 u 族直线，(5)式表示的直线族称为 v 族直线.

在(4)式中令 $u\to 0$ 和 $u\to\infty$，则分别得

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0\\ 1-\frac{y}{b}=0\end{cases}\tag{6}$$

与

$$\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0\\ 1+\frac{y}{b}=0\end{cases}\tag{7}$$

这两条直线也应看作是 u 族直线.

同理：

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0\\[2ex]1-\dfrac{y}{b}=0\end{cases}\tag{8}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0\\[2ex]1+\dfrac{y}{b}=0\end{cases}\tag{9}$$

这两条直线应看作是 v 族直线.

4° 证明 u 族(v 族)直线是单叶双曲面的直母线族.

这要从两个方面来证明:

(i) 证明 u 族(v 族)直线中任何一条直线上的点都在单叶双曲面(1)上.

(ii) 证明单叶双曲面(1)上的任一点(x_0, y_0, z_0),一定在 u 族(v 族)直线中的某一条直线上.

证明过程略.

这样就证明了曲面(1)是由 u 族(v 族)直线所构成,因此单叶双曲面(1)是直纹曲面,而 u 族(v 族)直线是单叶双曲面(1)的一族直母线,称为 u 族(v 族)直母线(参看图9—6和图9—7). 对于双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\tag{10}$$

用同样的方法可以证明它也有两族直母线,它们的方程分别是:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2u\\[2ex]\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{u}\end{cases}\tag{11}$$

与

$$
\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2v \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{v} \end{cases} \tag{12}
$$

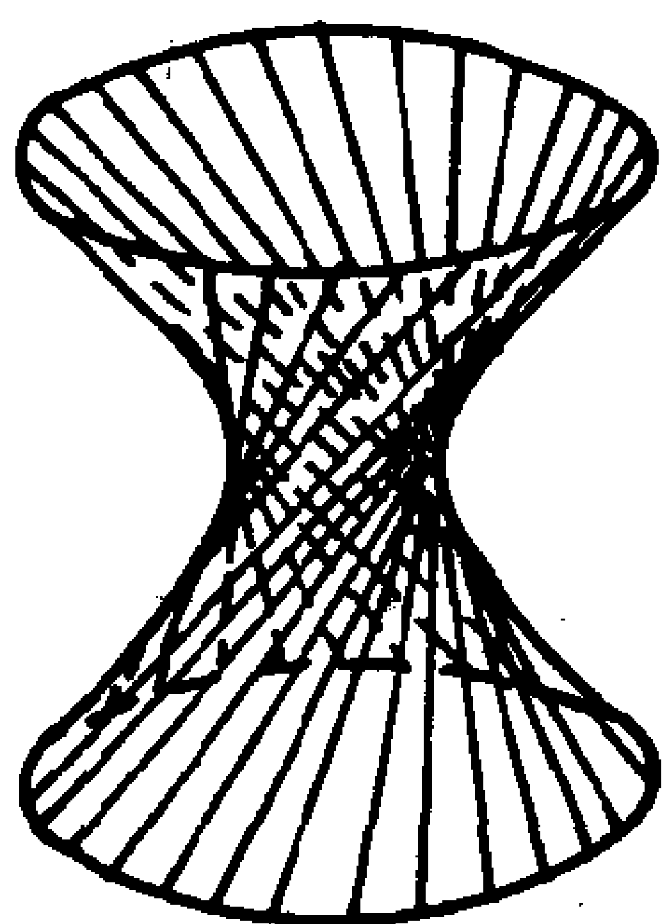


图 9—6

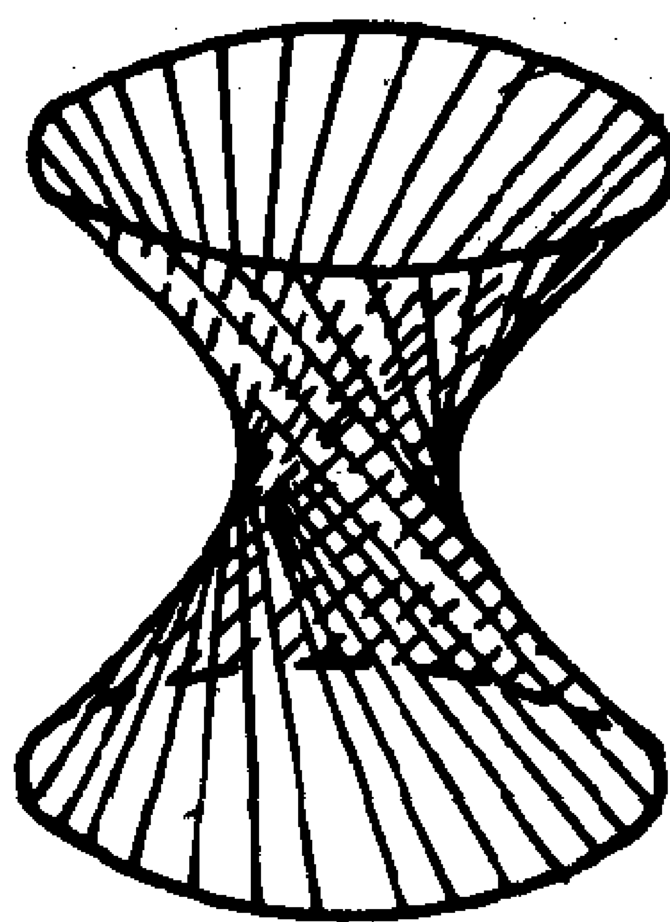


图 9—7

(参看图9—8)

关于单叶双曲面和双曲抛物面的直母线有下列性质：

定理9.4.1 对于单叶双曲面和双曲抛物面上任一点，两族直母线中各有一条直母线通过这一点.

定理9.4.2 单叶双曲面或双曲抛物面的同族的两条母线异面. 单叶双曲面同族的三条母线必不平行于同一平面，而双曲抛物面同族的母线平行于同一平面.

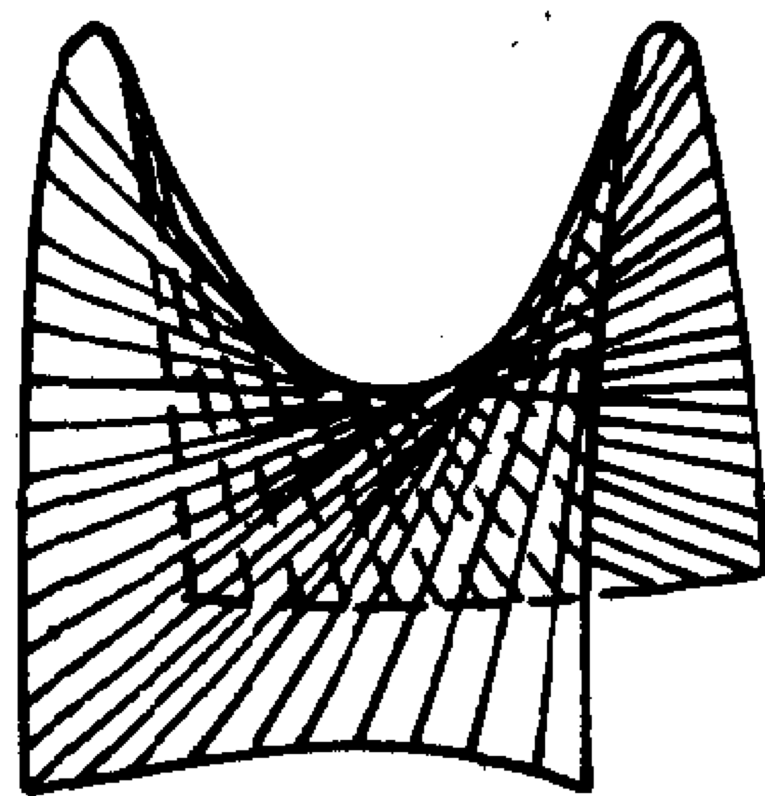


图 9—8

定理9.4.3 单叶双曲面的异族两条母线共面，而双曲抛物面异族的两条母线必相交.

定理9.4.4 单叶双曲面或双曲抛物面两族母线无公共

直线.

定理9.4.5 单叶双曲面或双曲抛物面上的直线不属于 u 族就属于 v 族.

推论 单叶双曲面或双曲抛物面有且仅有两族直母线.

以上几个定理的证明可参考朱鼎勋编著《空间解析几何》.

例1 试求单叶双曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$上过定点(2,3,4)的母线方程.

解 u 族母线：$\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{z}{4}=u(1+\frac{y}{3})\\ \frac{x}{2}-\frac{z}{4}=\frac{1}{u}(1-\frac{y}{3})\end{cases}$

v 族母线：$\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{z}{4}=v(1+\frac{y}{3})\\ \frac{x}{2}+\frac{z}{4}=\frac{1}{v}(1-\frac{y}{3})\end{cases}$

将点(2,3,4)代入，得 $u=1, v=0$.

$\therefore u$ 族中一条母线方程为

$$\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{z}{4}=1+\frac{y}{3}\\ \frac{x}{2}-\frac{z}{4}=1-\frac{y}{3}\end{cases}$$

v 族中一条母线方程为

$$\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{z}{4}=0\\ 1-\frac{y}{3}=0\end{cases}$$

或写作$\frac{x-2}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$及$\frac{x}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{2}$.

例2 在双曲抛物面 $x^2-y^2=2z$ 上，试求平行于平面 $x+$

$y+z=0$的直母线方程.

解 将双曲抛物面方程化为

$$(x+y)(x-y)=2z$$

则两组直母线方程为

$$\begin{cases} x-y=2\lambda \\ \lambda(x+y)=z \end{cases} \tag{1}$$

和

$$\begin{cases} x+y=2\mu \\ \mu(x-y)=z \end{cases} \tag{2}$$

而直母线(1)的方向向量为

$$\vec{a}_1=\left\{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix}\right\}$$

$$=\{1,1,2\lambda\}$$

因为所求直母线与已知平面平行，所以，由

$$\vec{a}_1\vec{n}=1\times1+1\times1+2k\times1=0$$

解得 $\lambda=-1$.

将λ值代入(1)式中，得到一直母线方程为

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

同理，直母线(2)的方向向量为

$$\vec{a}_2=\left\{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\mu & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ h & -h \end{vmatrix}\right\}$$

$$=\{-1,1,-2u\}$$

则由

$$\vec{a}_2\vec{n}=-1\times1+1\times1-2\mu\times1=0$$

解得 $\mu=0$

将 μ 值代入(2)式中，得到另一直母线方程为

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

例3 证明双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z (a \neq b)$ 上的两条直母线直交时，其交点必在一双曲线上.

证明 两条相交的直母线必异族，双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ 的两直母线为

$$u\text{ 族:}\quad \begin{cases} w(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 2u \\ u(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = wz \end{cases}$$

$$v\text{ 族:}\quad \begin{cases} t(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 2v \\ v(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = tz \end{cases}$$

所以其交点中 $z = \frac{2uv}{wt}$

两族母线的方向矢量分别为 $\vec{s}_u = \{aw^2, -bw^2, 2wu\}$，$\vec{s}_v = \{at^2, bt^2, 2vt\}$，因为 $\vec{s}_u \perp \vec{s}_v$，所以 $\vec{s}_u \cdot \vec{s}_v = 0$ 即 $a^2w^2t^2 - b^2w^2t^2 + 4wtuv = 0$，亦即 $\frac{4uv}{wt} = b^2 - a^2$.

从而得 $z = \frac{b^2 - a^2}{2}$

所以交点满足方程
$$\begin{cases} z = \frac{a^2 - b^2}{2} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \end{cases}$$

即满足方程
$$\begin{cases} z=\dfrac{b^2-a^2}{2} \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=b^2-a^2 \end{cases} \qquad (*)$$

又因为 $a\neq b$ 此方程表示一条双曲线，于是命题得证.

评注 还可以证明双曲抛物面$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ 过曲线(*)上任一点的两条母线互相垂直.

事实上 $\vec{s}_u\cdot\vec{s}_v=w^2t^2(a^2-b^2+2z)$

$\because z=\dfrac{b^2-a^2}{2}$ $\quad\therefore \vec{s}_u\cdot\vec{s}_v=w^2t^2(a^2-b^2+b^2-a^2)=0$,

$\therefore \vec{s}_u\perp\vec{s}_v$.

这样以来，本例又可叙述为：

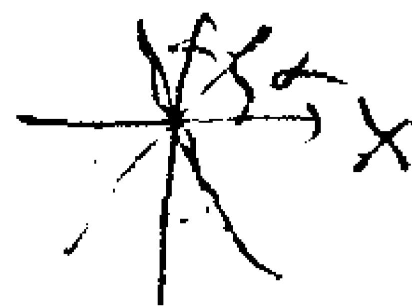
双曲抛物面$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z(a\neq b)$上的互相垂直的直母线交点的轨迹是一条双曲线.

同样的方法可以证明：

单叶双曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1(c^2<a^2+b^2)$上互相垂直的直母线交点的轨迹是椭圆.

例4 已知空间两异面直线间的距离为$2a$，夹角为2α，过这两直线分别作平面，并使这两平面互相垂直，求这样的两平面交线的轨迹.

解 取两异面直线的公垂线为 z 轴，公垂线的中点 o 为原点，x 轴与两异面直线成等角. 于是以两异面直线为轴的两族平面来的方程分别为



π_1: $\qquad x\,\mathrm{tg}\alpha-y+\lambda_1(z-a)=0$

π_2: $\qquad x\,\mathrm{tg}\alpha+y+\lambda_2(z+a)=0$

由 $\pi_1\perp\pi_2$，得 $\mathrm{tg}^2\alpha-1+\lambda_1\lambda_2=0$即 $\lambda_1\lambda_2=1-\mathrm{tg}^2\alpha$

又由 π_1,π_2的方程可得

$$\lambda_1\lambda_2(z^2-a^2)=x^2\mathrm{tg}^2\alpha-y^2$$

于是有　$x^2\mathrm{tg}^2\alpha-y^2=(1-\mathrm{tg}^2\alpha)(z^2-a^2)$.

(i) 当$2\alpha\neq\frac{\pi}{2}$时，$\mathrm{tg}^2\alpha\neq1$，所以有.

$$\frac{x^2}{\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha}a^2}-\frac{y^2}{(1-\mathrm{tg}^2\alpha)a^2}-\frac{z^2}{a^2}=-1$$

即

$$-\frac{x^2}{(\mathrm{ctg}^2\alpha-1)a^2}+\frac{y^2}{(1-\mathrm{tg}^2\alpha)a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$

此时轨迹为单叶双曲面.

(ii) 当$2\alpha=\frac{\pi}{2}$时，$\mathrm{tg}^2\alpha=1$，所以有

$$x^2-y^2=0$$

此时轨迹为二相交平面.

评注　本例也给出了单叶双曲面的实际例证.

习　题　9.4

1. 求过双曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$上一点$(2,-1,\frac{4}{3})$所作的两条母线的方程.

2. 求曲面$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=2z$上过点$(4,0,2)$的直母线的方程.

3. 求证$z=xy$是直纹曲面，且求母线方程.

4. 试求单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$上两条直交母线的交点轨迹.

5. 求双曲抛物面$x^2-y^2=2z$上平行于平面$\pi: x+y+z=0$的直母线方程.

§9.5　二次曲面的分类

在空间解析几何中，三元二次方程

$$ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2gyz+2fzx+$$
$$2ux+2vy+2wz+d=0 \tag{1}$$

所表示的曲面，称为二次曲面．利用坐标变换，总可以把二次曲面的一般方程(1)化成标准形式，按其特点共可分为17类，它们代表17种不同的二次曲面，列表如下：

表9—4

序号	标准方程	曲面形状	曲面名称
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		椭球面（椭圆面）
2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	无图形	虚椭球面
3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$		点（虚二次锥面）
4	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		单叶双曲面

（续表）

序号	标准方程	曲面形状	曲面名称
5	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$		双叶双曲面
6	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$		二次锥面
7	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$		椭圆抛物面

（续表）

序号	标准方程	曲面形状	曲面名称
8	$\frac{-x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$		双曲抛物面
9	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$		椭圆柱面
10	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	无图形	虚椭圆柱面
11	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$		直　线（一对虚相交平面）

（续表）

序号	标准方程	曲面形状	曲面名称
12	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$		双曲柱面
13	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$		一对相交平面
14	$x^2=2py$		抛物柱面

（续表）

类序	标准方程	曲面形状	曲面名称
15	$x^2=a^2$		一对平行平面
16	$x^2=-a^2$	无图形	一对平行的共轭虚平面
17	$x^2=0$		一对重合平面

在此要求读者对这17类二次曲面的标准方程和它们的图形要熟练掌握，给出一个标准方程，就能立即判断出它是哪种曲面. 如给出的方程虽不是标准形式，但能化成标准形式，也应能及时判断出它是哪种曲面.

§9.6 平行截割法

在一般情况下，要想描绘出一个二次方程所确定的空间曲面的图形是很困难的，这是因为通常用的描点法，对空间情

况已不再适用，为了看出某一方程所确定的曲面形状，就得借助于平面及其方程．在这一节里就是用一组平行平面去截所要研究的曲面，以便从截口的形状来判断该曲面的形状，这种方法叫做“平行截割法”（也称平行截口法）．为了简便，通常用坐标面及平行于坐标面的平面去截所要考察的曲面．这些平面与曲面的交线就是截口，截口都是平面曲线．考察这些截口的位置和形状，然后再进一步加以综合，便可了解曲面的概貌或绘制其图形了．

例1　试证平面 $x-2=0$ 与椭球面 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ 相交成一椭圆，并求这椭圆的半轴的长及顶点坐标．

解　已知椭球面与平面的交线为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1\\ x-2=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{3}=1\\ x=2\end{cases}$$

此方程表示一椭圆；长半轴 $a=3$，短半轴 $b=\sqrt{3}$．

顶点：$(2,0,\pm\sqrt{3})$，$(2,\pm3,0)$．

例2　写出双曲抛物面 $x^2-y^2=8z$ 在下列各平面上的截口的方程，并指出它们各是什么曲线？

(1)　$x=0$，　(2)　$x=2$；　(3)　$y=0$；　(4)　$y=4$；

(5)　$z=0$；　(6)　$z=2$；　(7)　$z=-2$

解

(1)　$\begin{cases}y^2=-8z\\ x=0\end{cases}$　　抛物线；

(2) $\begin{cases} y^2=-8(z-\frac{1}{2}) \\ x=2 \end{cases}$ 抛物线；

(3) $\begin{cases} x^2=8z \\ y=0 \end{cases}$ 抛物线；

(4) $\begin{cases} x^2=8(z+2) \\ y=4 \end{cases}$ 抛物线；

(5) $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ z=0 \end{cases}$ 二相交直线；

(6) $\begin{cases} \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1 \\ z=2 \end{cases}$ 等轴双曲线；

(7) $\begin{cases} \frac{-x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1 \\ z=-2 \end{cases}$ 等轴双曲线.

例3 试确定 m 为何值时，平面 $x+mz-1=0$与单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$相交成：(i)椭圆；(ii)双曲线.

解 将平面方程代入曲面方程，得

$$(1-mz)^2+y^2-z^2=1$$

或

$$\frac{y^2}{\frac{m^2}{m^2-1}}+\frac{(z-\frac{m}{m^2-1})^2}{\frac{m^2}{(m^2-1)^2}}=1 \qquad (1)$$

柱面(1)与平面 $x^2+mz-1=0$的交线.

(i) 若此曲线是椭圆，则必有

$$\frac{m^2}{m^2-1}>0$$

于是解得

$$|m|>1$$

(ii)若曲线是双曲线则必有

$$\frac{m^2}{m^2-1}<0$$

于是解得

$$|m|<1 \quad 且 m \neq 0$$

因此,(i)当$|m|>1$时,平面与曲面的交线是椭圆;(ii)当$|m|<1$且$m\neq0$时,平面与曲面的交线是双曲线.

例4 已知椭圆抛物面$x^2+\frac{y^2}{2}=2z$和平面$x=kz(k<0)$的交线是一圆,试求此圆的半径.

解 平面$x=kz(k<0)$是过y轴的一个平面,又因为平面$y=0$是已知椭圆抛物面的一个对称平面,所以圆心必在平面$y=0$上(图9—9).

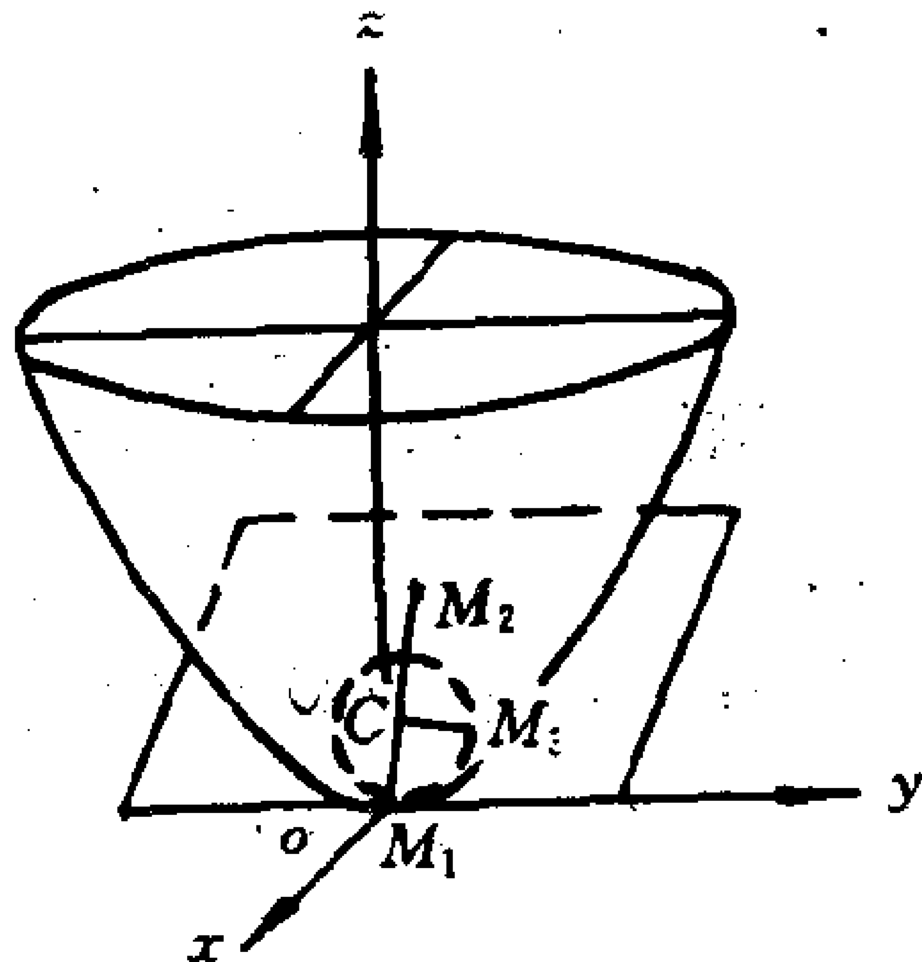


图 9—9

由方程组

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{2}=2z \\ x=kz \\ y=0 \end{cases}$$

求得圆上两点$M_1(0,0,0)$和$M_2(\frac{2}{k},0,\frac{2}{k^2})$,即直径的两个端点,由于圆心$C(x_0,y_0,z_0)$是直径$\overline{M_1M_2}$的中点,则

$$x_0=\frac{0+\frac{2}{k}}{2}=\frac{1}{k}$$

$$y_0=\frac{0+0}{2}=0$$

$$z_0 = \frac{0 + \frac{2}{k^2}}{2} = \frac{1}{k^2}$$

∴圆的半径为

$$r = |M_1C| = \sqrt{(\frac{1}{k} - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (\frac{1}{k^2} - 0)^2}$$

$$= -\frac{1}{k}\sqrt{1 + \frac{1}{k}} \tag{1}$$

为确定系数 k，在圆上再取一点 M_3，不妨令 $x = \frac{1}{k}$，则由方程组

$$\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{2} = 2z \\ x = kz \\ x = \frac{1}{k} \end{cases}$$

求得点 M_3 的坐标为 $(\frac{1}{k}, \frac{\sqrt{2}}{k}, \frac{1}{k^2})$，(注意，解出两组坐标，只取其中一组)由于

$$r = |CM_3| = \sqrt{(\frac{1}{k} - \frac{1}{k})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{k} - 0)^2 + (\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2})^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{k} \tag{2}$$

由(1)、(2)两式得

$$-\frac{1}{k}\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{k}$$

解之，得

$$k = -1 \quad (k = 1 \text{ 舍去})$$

再代入(2)式，得

$$r = -\frac{\sqrt{2}}{k} = \sqrt{2}$$

习　题　9.6

1. 证明单叶双曲面 $x^2+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ 在二平行平面 $y=1$ 及 $y=4$ 上的截口曲线皆为双曲线，并求它们的实轴长、虚轴长以及顶点坐标和实轴方程.

2. 求平面 $z=1$ 截单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$ 所得到的截口椭圆的方程，以及它的两个半轴长和顶点坐标.

3. 已知二次曲面方程 $Px^2+Qy^2+Rz^2=1$，试确定这个曲面，使它过 $(1,0,0)$ 和曲线 $\begin{cases}3x^2-2y^2=4\\ z=1\end{cases}$

4. 已知抛物面的方程是 $Px^2+Qy^2=2z$ 形式，且过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2=4\\ z=2\end{cases}$ 确定它的方程.

5. 求单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ 分别在 $x=2$ 和 $z=4$ 上的截口曲线的方程，并指出这些截口是什么曲线?

6. 求二平面 $z=3$ 及 $z=-3$ 与双叶双曲面 $x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=-1$ 的交线的方程，并指出它是什么图形.

7. 分别求平面 $z=2$ 及 $x=2$ 与椭圆抛物面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2z$ 的交线方程，并指出它们各是什么曲线.

8. m 取什么值时，平面 $x+my-2=0$ 与椭圆抛物面 $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$ 相交于(1)椭圆；(2)抛物线.

9. 已知平面 $7x+2z=5$ 与椭圆抛物面 $53x^2+4y^2=8z$ 的交线是一个圆，求这个圆的半径 R.

§9.7 曲面的判别

给出一个已知方程，如何来判别它所表示的是什么曲面，一般有如下几种情况：

(1) 所给已知方程为标准方程，则可直接辨认出它表示哪种曲面.

(2) 所给已知方程与标准方程略有差别，则可通过配方将一次项吸收到平方项中去，将常数项吸收到一次项中去，把方程变成标准形式，然后就可辨认它是哪种曲面.

(3) 所给已知方程中有一项是两个变量的乘积项，可通过空间的绕轴旋转变换，把乘积项消去，再变为标准形式，即可辨认它是哪种曲面.

(4) 所给已知方程的系数中含有参数，那么就要根据参数的不同取值范围来进行讨论. 参数在不同的范围取值，方程一般表示不同的曲面.

例1 指出下列方程所表示曲面的名称，并说明是否为旋转曲面和直纹面.

(1) $2x^2+2y^2=z$；　　(2) $2x^2+2y^2=z^2$；

(3) $-\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{3}=-1$；　　(4) $\frac{x^2}{3}-y^2-\frac{z^2}{3}=-1$；

(5) $y^2+z^2=2$；　　(6) $x^2-y^2=0$；

(7) $y^2-z^2=-x$；　　(8) $3x^2+y^2=0$；

(9) $y^2=1-x$；　　(10) $z^2=1$.

解 (1) 旋转抛物面，旋转曲面；

(2) 直圆锥面，旋转曲面，直纹曲面；

(3) 双叶双曲面；

(4) 单叶双曲面，直纹曲面；

(5) 直圆柱面，旋转曲面，直纹曲面；

(6) 二相交平面，直纹曲面；

(7) 双曲抛物面，直纹曲面；

(8) 直线；

(9) 抛物柱面、直纹曲；

(10) 一对平行平面，直纹曲面.

例 2 说明方程$2x^2+y^2+z+3=0$表示哪种曲面？

解 把已知方程化为

$$2x^2+y^2=-(z+3)$$

与标准方程比较，可知其表示椭圆抛物面.

例3 说明方程$2x^2+y^2+3z^2+4x+1=0$表示哪种曲面？

解 把已知方程配方，得

$$2(x^2+2x+1)+y^2+3z^2-1=0$$

即
$$2(x+1)^2+y^2+3z^2=1$$

亦即
$$\frac{(x+1)^2}{\frac{1}{2}}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{\frac{1}{3}}=1$$

与标准方程比较，知其表示椭球面.

例 4 说明方程$z=x^2+xy+y^2$表示哪种曲面.

解 通过坐标变换，把方程化成标准形式，z 轴不动．在 oxy 平面内施行绕原点旋转$\frac{\pi}{4}$的旋转变换(也就是空间坐标系绕子轴旋转$\frac{\pi}{4}$，这种绕一个坐标轴旋转的变换叫做绕轴旋转，它是空间坐标系的旋转变换的一个最简单的情况)，变换后的新坐标系记为$ox'y'z'$，点(x,y,z)在变换后的新坐标为(x',y',z')，于是由平面解析几何中的旋转变换公式，有

$$\begin{cases} x = x'\cos\frac{\pi}{4} - y'\sin\frac{\pi}{4} \\ y = x'\sin\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} \\ z = z' \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \\ z = z' \end{cases}$$

代入已知方程，得

$$z' = \frac{x'^2}{\frac{2}{3}} + \frac{y'^2}{2}$$

它表示椭圆抛物面.

例 5 说明方程$3x^2-4y^2=5z^2+K$ 表示哪种曲面?

解 先把方程化为

$$3x^2 - 4y^2 - 5z^2 = K$$

(1) 当 $K<0$时，表示单叶双曲面；

(2) 当 $K=0$时，表示二次锥面；

(3) 当 $K>0$时，表示双叶双曲面.

例 6 说明方程 $x^2+2y^2+3z^2=x+K$ 表示哪种曲面?

解 先把方程配方，得

$$(x - \frac{1}{2})^2 + 2y^2 + 3z^2 = K + \frac{1}{4}$$

(1)当 $K<-\frac{1}{4}$时，方程表示虚椭圆面；

(2)当 $K=-\frac{1}{4}$时，方程表示点椭圆面；

(3)当 $K>-\frac{1}{4}$ 时，方程表示椭圆面.

习　题　9.7

1. 判别下列方程所表示曲面的名称，并说明是否是旋转曲面.

(1) $4x^2+4y^2+z^2=16$；　　(2) $y^2-9z^2=81$；

(3) $4x^2-4y^2+z^2=0$；　　(4) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z=0$；

(5) $x^2-2y^2+z^2=4$；　　(6) $3x^2-2y^2-z^2=6$；

(7) $y^2-z^2=2x$；　　(8) $3x^2+y^2=0$；

(9) $x^2=1$；　　(10) $2x^2+2z^2=3$.

2. 说明方程 $3x^2+4y^2+z^2+8y-8=0$ 表示哪种曲面？

3. 说明方程 $3x^2+4y^2-2z+5=0$ 表示哪种曲面？

4. 说明方程 $x^2+yz=0$ 表示哪种曲面？

5. 说明下列曲面的形状.

(1) $z^2-3z+2=0$；

(2) $x^2-y^2+z^2-2x-2y=0$；

(3) $x^2-y^2+z^2+2x-2y+2z+1=0$；

(4) $x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z+1=0$；

(5) $x^2-y^2-z^2+2x-2y-2z+1=0$；

(6) $z^2=x+y$；

(7) $z^2=x^2+xy+y^2$.

6. 说明方程 $x^2-4y^2=5z^2+2\lambda x$ 表示哪种曲面？

7. 说明方程 $2x^2+3y^2+\lambda z-1=0$ 表示哪种曲面？

8. 试就 K 讨论方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=K$ 表示哪种曲面？

9. 试就 λ 讨论方程 $\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=2z\ (a>b>0)$ 表示哪种曲面？

§9.8　二次曲面的轨迹问题

大家知道，在平面上动点的轨迹是一平面曲线；而在空间

中动点的轨迹往往是一曲面(有时也可能是一空间曲线).关于轨迹问题的解法,一般是先设出动点的坐标,然后根据动点所满足的条件列出关系式,再从这些关系式的内在联系找出动点所满足的方程式,最后再判断一下该方程式所表示的是哪种曲面(线).下面举几个例子来说明.

例 1 设动点与定点(1,0,0)的距离等于该动点到定平面 $x=4$ 的距离的一半,求动点的轨迹.

解 设动点为 $P(x,y,z)$,则 P 到定点(1,0,0)的距离为

$$d_1 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$$

P 到平面 $x=4$ 的距离为

$$d_2 = |x-4|$$

依题意有 $2d_1 = d_2$

即

$$2\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = |x-4|$$

两边平方,得

$$4[(x-1)^2 + y^2 + z^2] = (x-4)^2$$

整理,得

$$3x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 12$$

即

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{3} = 1$$

它表示旋转椭球面——长球面,这就是所求轨迹.

例 2 求到两异面直线等距离之点的轨迹,并说明其形状.

解 设两异面直线的方程为

$$l_1:\begin{cases} y = mx \\ z = c \end{cases} \qquad l_2:\begin{cases} y = -mx \\ z = -c \end{cases}$$

再设动点 $P(x,y,z)$，于是 P 到 l_1 用 l_2 之距离分别是 d_1 及 d_2，则有

$$d_1^2=[m^2(z-c)^2+(z-c)^2+(mx-y)^2]/(1+m^2)$$

$$d_2^2=[m^2(z+c)^2+(z+c)^2+(mx+y)^2]/(1+m^2)$$

由 $d_1=d_2$，得

$$c(1+m^2)z=-mxy$$

此式表示双曲抛物面.

例 3 求到定点及定平面距离比为常数的点的轨变，说明轨迹形状.

解 设定比为 $\lambda(>0)$，现分两种情况加以讨论.

(1)定点不在定平面上，以定平面为 xy 面，定点到 xy 面的垂线为 z 轴而建立直角坐标系，于是定点 $(0,0,c)$，$c\neq 0$，动点 $P(x,y,z)$，由假设

$$\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}=\lambda|z|$$

化简配方得

$$x^2+y^2+z^2(1-\lambda^2)-2cz+c^2=0$$

(a) $\lambda=1, x^2+y^2=2c(z-\frac{c}{2})$

此式表示旋转抛物面.

(b) $\lambda\neq 1, x^2+y^2+(1-\lambda^2)(z-\frac{c}{1-\lambda^2})^2=\frac{c^2\lambda^2}{1-\lambda^2}$

(i) $0<\lambda<1$，表示旋转双叶椭球面；

(ii) $\lambda>1$，表示旋转双叶双曲面.

(2) 定点在定平面上，以定平面为 xy 面，定点为原点而建立直角坐标系，由假设

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\lambda|z|$$

化简得

$$x^2+y^2+z^2(1-\lambda^2)=0$$

(*a*)　当 $\lambda=1$时，$x^2+y^2=0$，表示直线$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$即 z 轴，或称表示一对虚相交平面.

(*b*)　当 $\lambda\neq1$时，

(i)$\lambda>1$时，表示直圆锥面；

(ii)　$0<\lambda<1$时，表示点(0,0,0)即坐标原点，或表示虚圆锥.

评注　虚曲面上的点并非皆虚点.

习　题　9.8

1. 设动点与定点(4,0,0)的距离等于该动点到定平面 $x=1$的距离的二倍，试求动点轨迹的方程，并指出它是哪种曲面.

2. 设动点到定点$(\frac{1}{2},0,0)$的距离与该动点到定平面 $x=-\frac{1}{2}$的距离相等，求动点的轨迹方程，并指出该方程表示哪种曲面.

3. 已知抛物线$\begin{cases}x^2=2z\\y=0\end{cases}$的顶点沿抛物线$\begin{cases}y^2=-4z\\x=0\end{cases}$移动，它所在的平面永远平行于 oxz 平面，试求其轨迹方程.

4. 试求双曲抛物面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 上垂直相交母线交点的轨迹.

5. 试求单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$上两条直交母线的交点轨迹.

6. 求与两条直线$\frac{x-6}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$和$\frac{x}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+4}{-2}$相交，且与平面$2x+3y-5=0$平行的直线的轨迹.

§9.9　二次曲面的作图

给出二次曲面的标准方程，要画出二次曲面的图形，大致

有如下步骤：

（1）第一步首先画出空间直角坐标系；

（2）第二步画出该曲面与三个坐标面的交线（即截部）；

（3）第三步根据需要可画出一个或几个该曲面与坐标面的平行平面的交线；

（4）第四步最后根据这些已得的截部和平行截线描出曲面的轮廓线.

从上述步骤中可知，画出曲面的截部以及该曲面与坐标面的平行平面的交线是二次曲面作图中关键的步骤，故下面先举例说明如何画曲面的截部以及曲面与坐标面的平行平面的交线，然后再举例说明二次曲面的作图方法.

例 1 试作椭圆$\begin{cases}\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{z^2}{9}=1\\ y=0\end{cases}$的图形.

解 （1）先在辅助的平面直角坐标系 $o'x'z'$ 上作出椭圆 $\dfrac{x'^2}{25}+\dfrac{z'^2}{9}=1$的实形叫做椭圆的正规图，再切于其顶点 A'、B'、C'、D' 作外切矩形（图9—10）.

（2）作空间直角坐标系 $o-xyz$，在 x 轴上取 A、B 两点，使得 $oA=oB=\dfrac{1}{2}o'B'$，在 z 轴上取 C、D 两点，使得 $oC=oD=o'D'$. 然后分别过 A、B 作 oz 的平行线，过 C、D 作 ox 的平行线，于是得到一个平行四边形（图9—11）.

在辅助图的线段$o'A'$上任意取一点S'，过S'而平行于

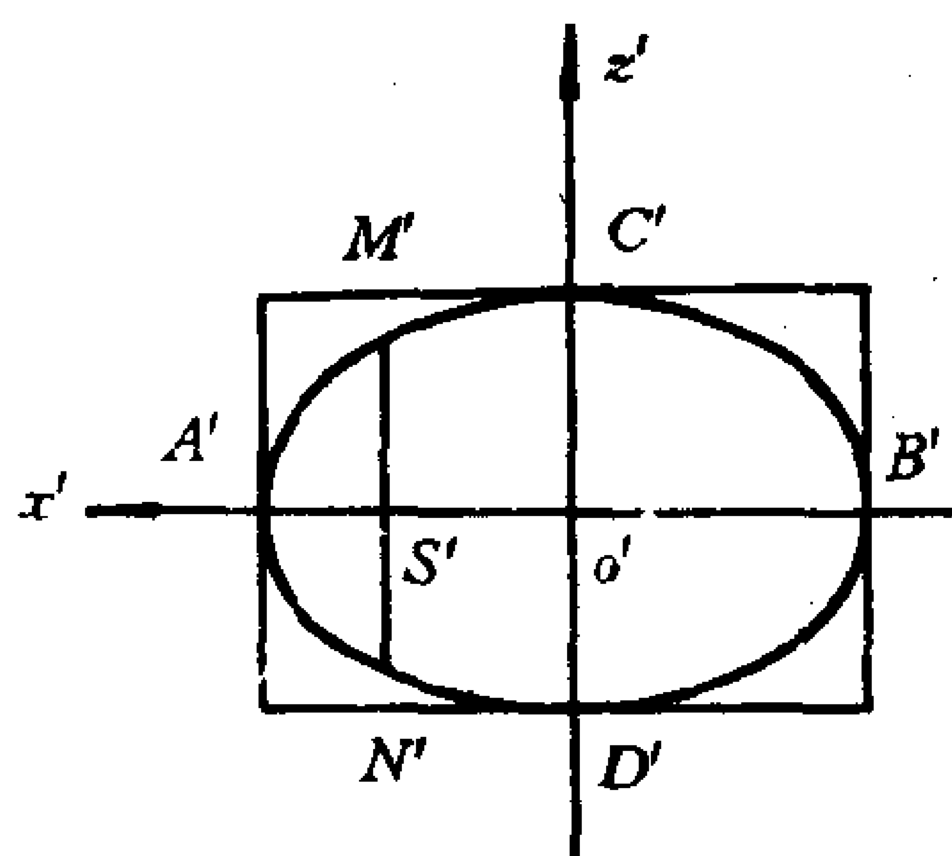


图 9—10

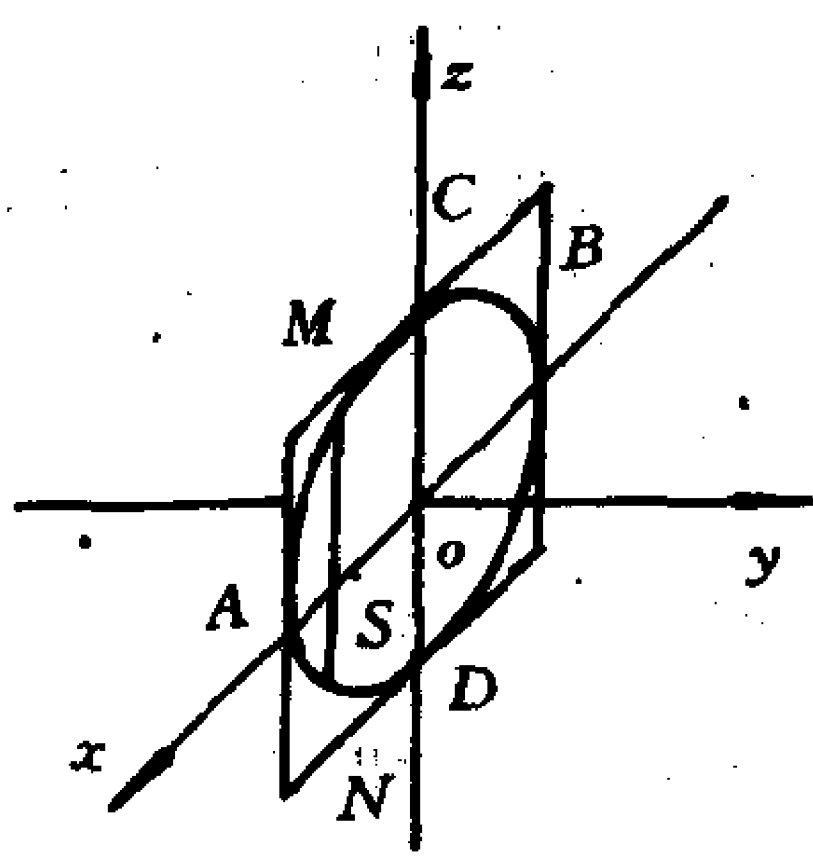


图 9—11

$o'Z'$的直线交椭圆于 M'、N'. 在 oxz 平面的线段 oA 上取 $oS=\frac{1}{2}o'S'$，过 S 作直线平行于 oz，在这平行线上取 $SM=SN=S'M'$，这 M、N 便是所求椭圆上的点. 按照这个方法可以作椭圆的许多点，最后依次将它们连成一条光滑的曲线，即得到所求作的椭圆，称为椭圆的侧视图（斜视图）. 注意，这椭圆要在 A、B、C、D 四点与平行四边形的周界相切. 当作图熟练时，只需作出（2）中的平行四边形然后内切于 A、B、C、D 四点大致画一个椭圆就可以了（参见图9—12）.

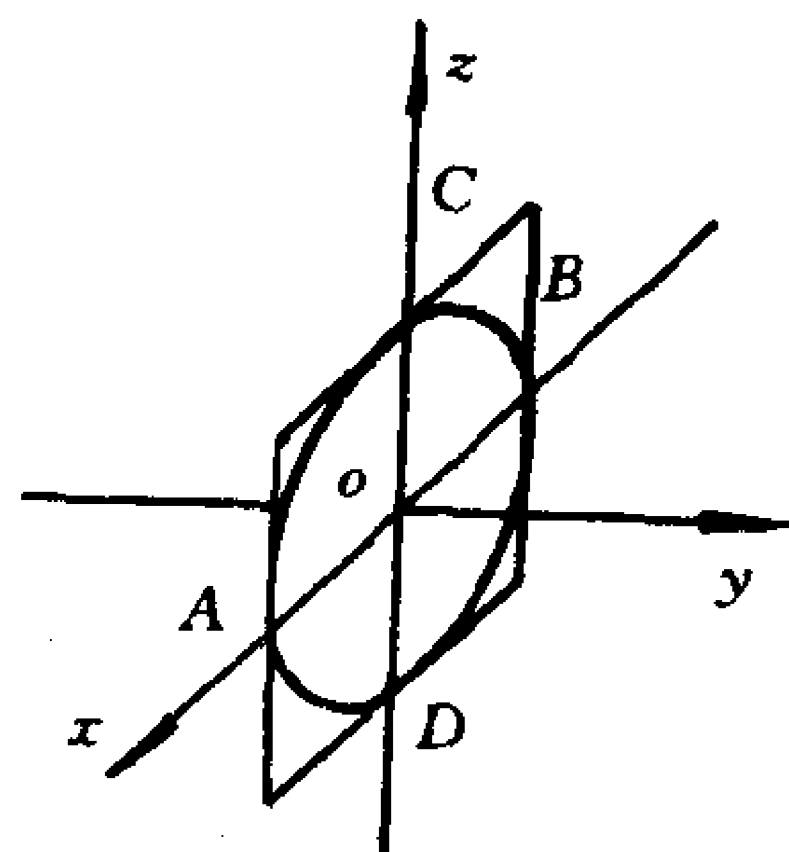


图 9—12

总起来说，（1）在辅助平面上作正视图；（2）在 $o-xyz$ 的 oxz 的平面上作侧视图. 在侧视图里竖线段的长度都与辅助图的对应线一样. 辅助图中的水平线在侧视图里都变为平行于 ox 轴的斜线，线段长度都等于原长一半. 辅助图里两轴平

行线围成长方形在侧视图里都变为平行四边形；(3)在辅助图里任意作纵坐标线，画出曲线的交点，在侧视图里作对应的纵坐标线，取出对应于交点的点，描点足够多时；连成曲线.

例2 作椭圆（双曲线）$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}\pm\dfrac{y^2}{4}=1\\ z=4\end{cases}$的图形.

解 从方程可知，此椭圆(双曲线)在 $z=4$的平面上，对称轴平行于 x 轴和 y 轴，且以(0,0,4)为中心，因此，先作出平面 $z=4$，再根据所给方程，在平面 $z=4$上仿照例1的作法，作出所求椭圆(双曲线)(见图9—13和图9—14).

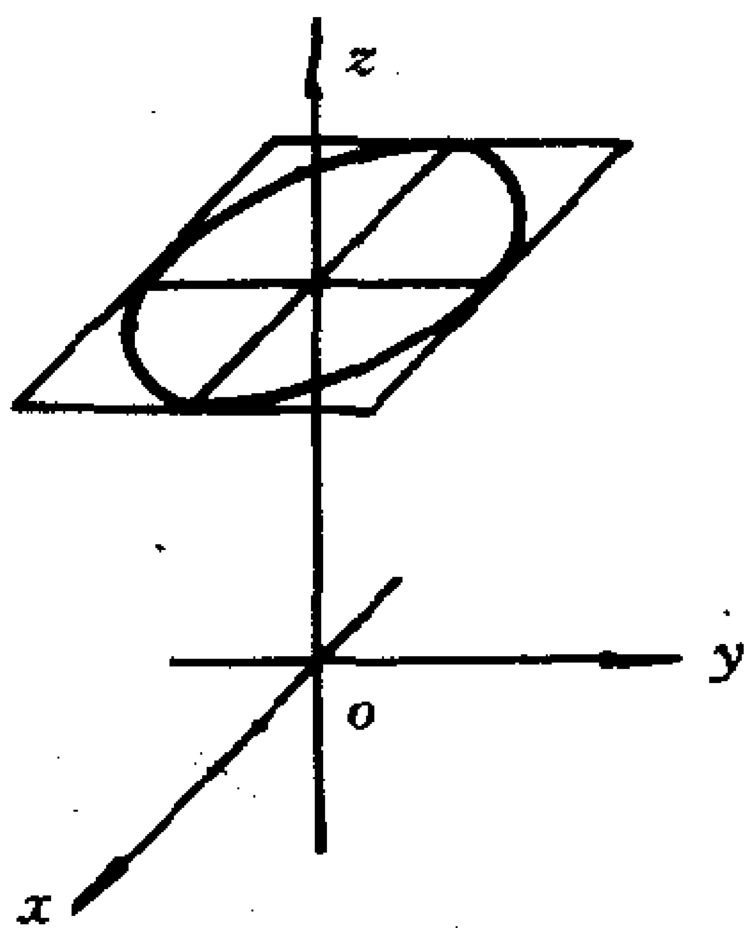


图 9—13

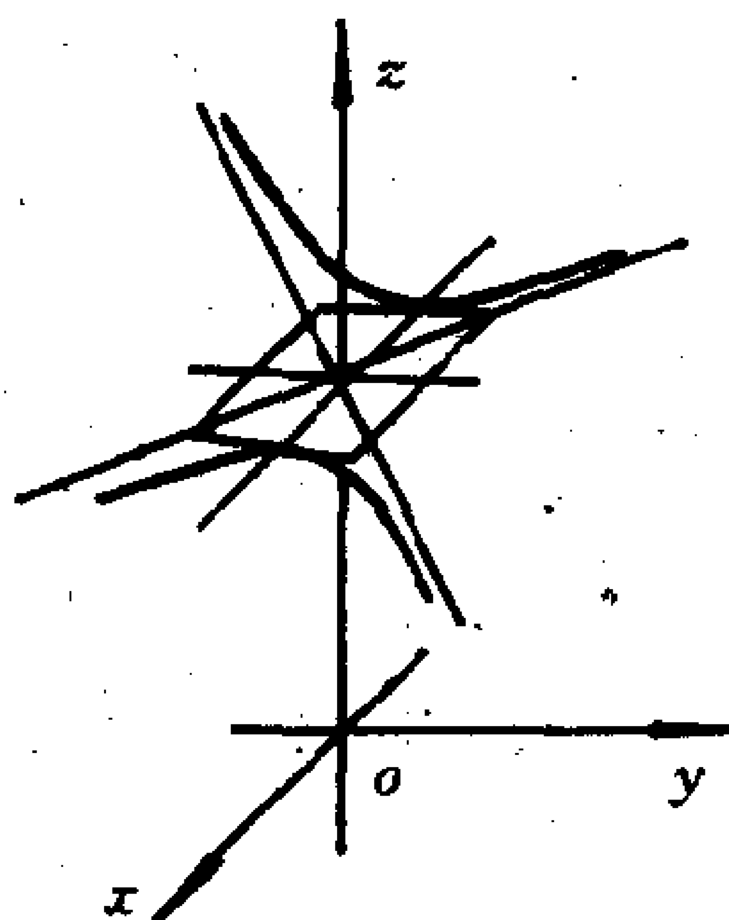


图 9—14

例3 作抛物线$\begin{cases}x^2=2(z+1)\\ y=2\end{cases}$的图形.

解 从方程可以看出，此抛物线在 $y=2$的平面上，它的顶点在(0,2,−1)，对称轴平行于 oz 轴，且开口向上，因此先作出平面 $y=2$，再根据所给方程仿照例1在此平面上作出所求的抛物线(见图9—14).

评注 从例2、例3，可归纳出在与坐标面平行的平面上，且对称轴平行于坐标轴的二次曲线的一般作图的方法如下：

(1)先画出曲线所在的平面；

(2)确定二次曲线的中心，画出对称轴；

(3)画辅助直线(如双曲线的基本矩形和渐近线等).

(4)画出二次曲线的近似图.

例4 作椭圆球面$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$的图形.

解 (1) 作坐标系 $o-xyz$.

(2)作出椭圆球面与三个坐标面的交线，即作出椭球面在三坐标面的截部

$$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1\\ z=0\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1\\ x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{z^2}{4}=1\\ y=0\end{cases}$$

这三个椭圆在椭球面的顶点处相交(见图9—16).

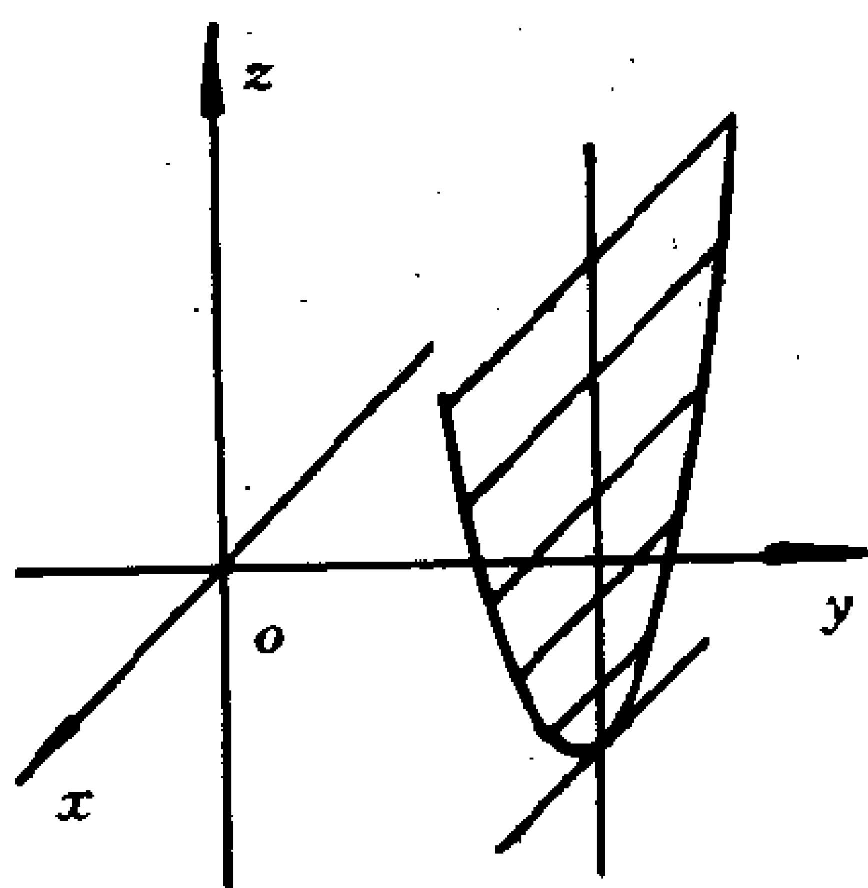


图 9—15

(3) 最后描出曲面的轮郭线，即可作出椭球面的图形(图9—15)

例5 作单叶双曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{25}=1$的图形.

解 (1) 作坐标系 $o-xyz$.

(2)作出单叶双曲面与三个坐标面的交线，即作出单叶双曲面在三坐标面的截部

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\\ z=0\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{25}=1\\ x=0\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{25}=1\\ x=0\end{cases}$$

这三个交线在顶点处相交.

（3）作单叶双曲面与平面 $z=5$ 及 $z=-5$ 的交线.

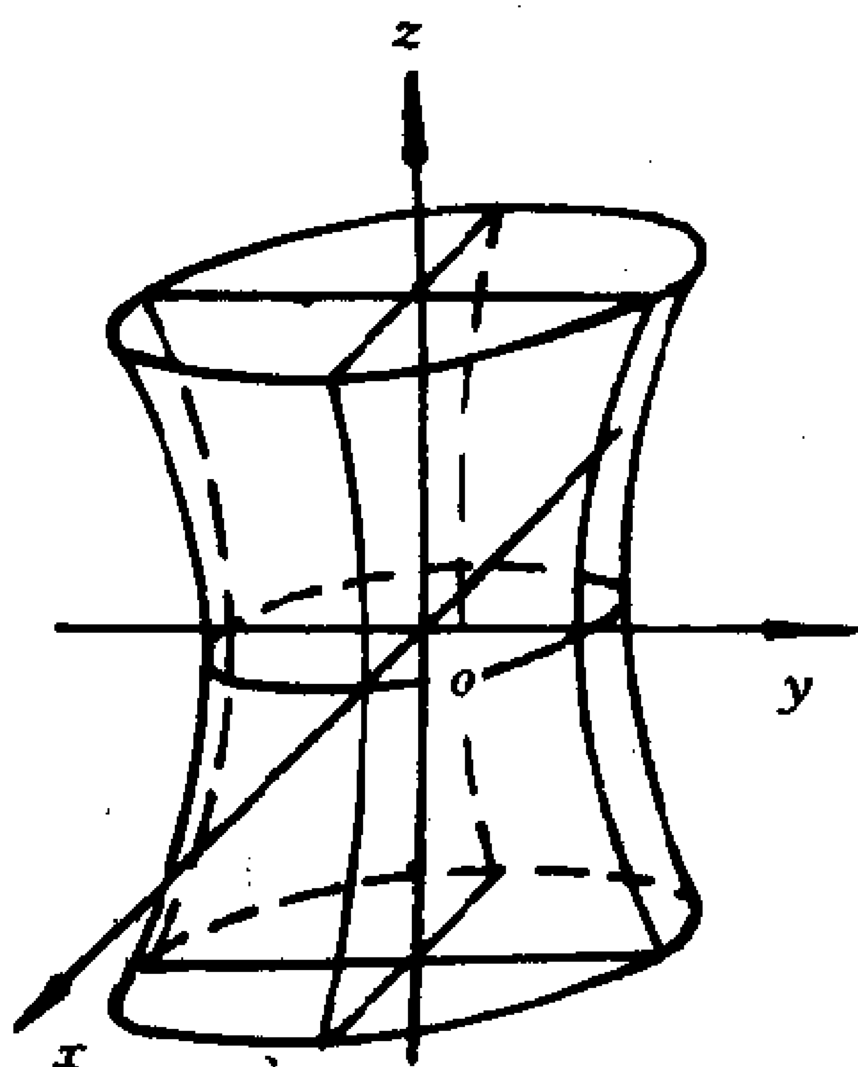


图 9—16

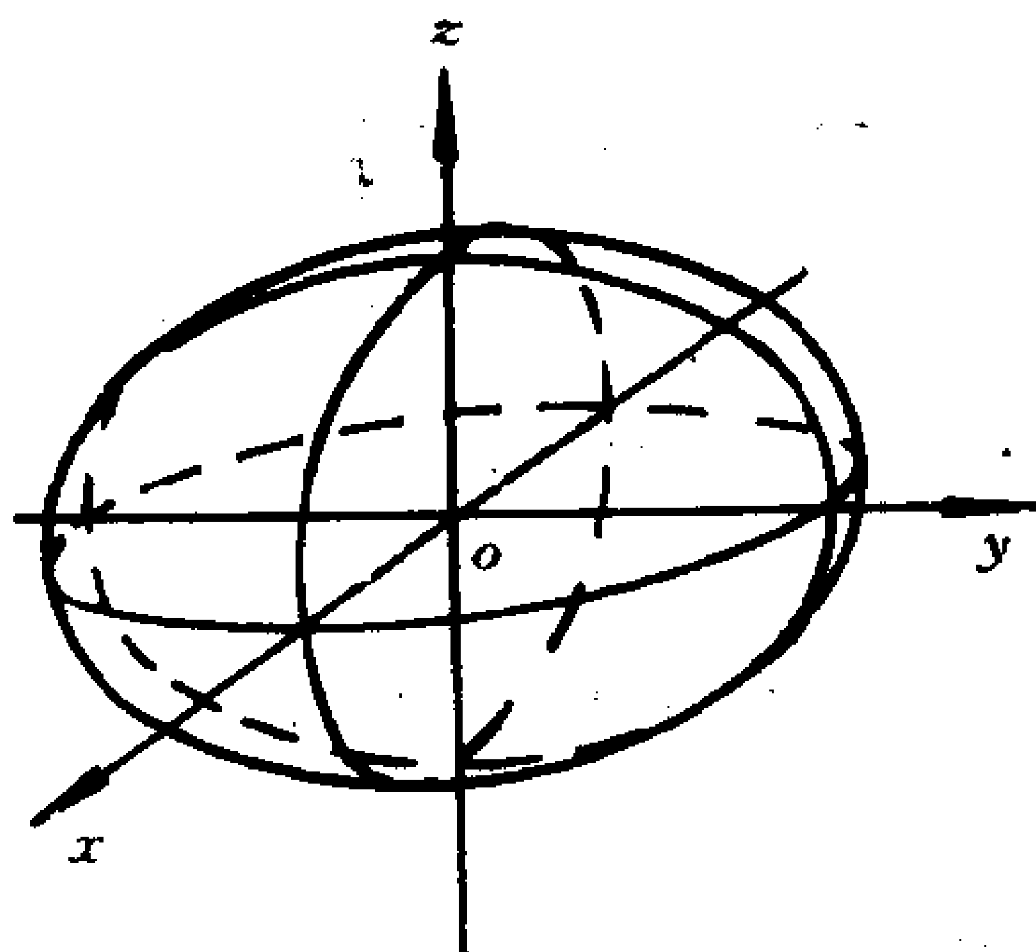


图 9—17

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{18}=1\\ z=5\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{18}=1\\ z=-5\end{cases}$$

（4）描出曲面的轮廓线，即得所求单叶双曲面的图形（见图9—17）.

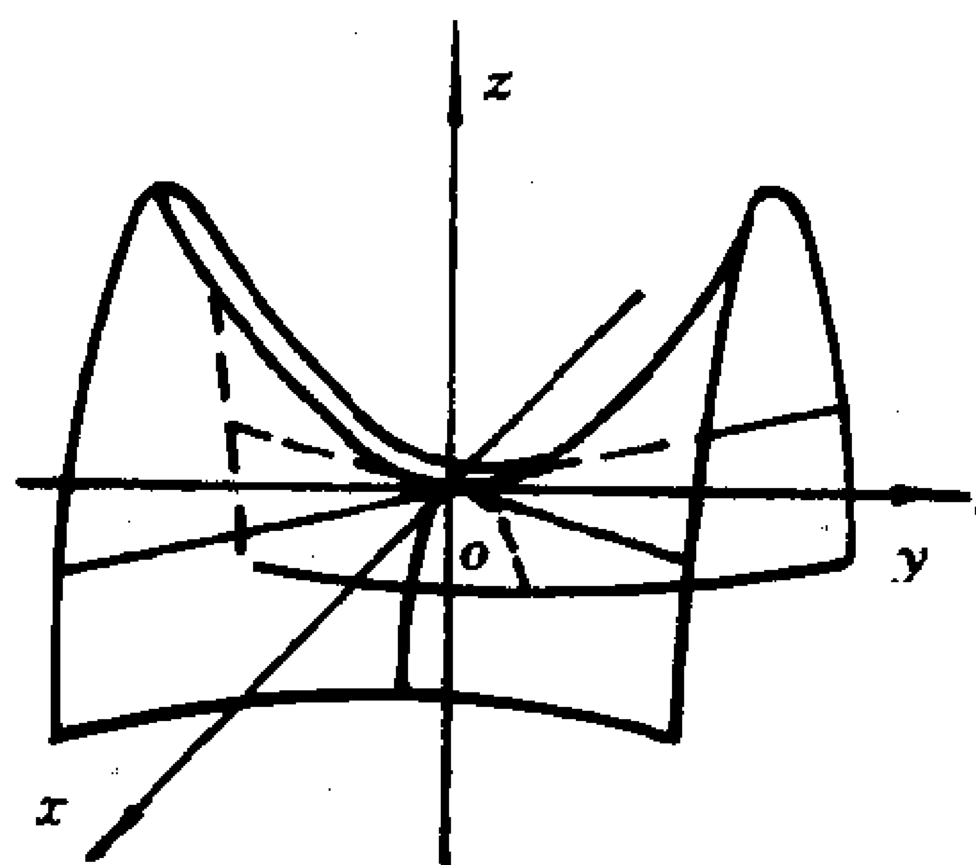


图 9—18

例6 作双曲抛物面 $-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{5}=z$ 的图形.

解 （1）作坐标系 $o-xyz$.

（2）作出双曲抛物面与三个坐标面的交线，即作出双曲抛物面在三坐标面的

截部：

$$\begin{cases} y^2 = 5z \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = -3z \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{5} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

(3)作双曲抛物面与平面 $y=4$及 $y=-4$的交线.

$$\begin{cases} x^2 = -3(z - \dfrac{16}{5}) \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = -3(z - \dfrac{16}{5}) \\ y = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{10} = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

(4)描出曲面的轮廓线,即得所求双曲抛物面的图形(见图9—18)

习 题 9.9

1. 作椭圆$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{z^2}{25} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$的图形.

2. 作双曲线$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$的图形.

3. 作抛物线$\begin{cases} x^2 = 2z \\ y = 0 \end{cases}$的图形.

4. 作椭图$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{z^2}{9} = 1 \\ z = 5 \end{cases}$的图形.

5. 作双曲线$\begin{cases} \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{9} = 1 \\ z = 5 \end{cases}$的图形.

6. 作抛物线$\begin{cases} x^2 = 2(z+1) \\ y = -3. \end{cases}$

7. 作椭球面$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} = 1$的图形,及平面 $y=2$与椭球面的交线.

8. 作单叶双曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$的图形及平面 $y=1$与它的交线.

9. 作双曲抛物面$-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=z$ 的图形及平面 $z=1$与它的交线.

10. 作椭圆抛物面$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=2z$ 的图形及平面 $y=2$与它的交线.

11. 作双叶双曲面$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=-1$的图形,及平面 $y=2$与它的交线.

主要参考文献

[1] 吕林根，许子道等，解析几何，高等教育出版社，1987，第3版.

[2] 杨大淳，解析几何，北京师范学院出版社，1987.

[3] 南开大学数学系，空间解析几何引论，人民教育出版社，1978.

[4] 郭卫中，空间解析几何讲义，东北师范大学出版社，1985.

[5] 吕林根，张紫霞，孙有金，解析几何，高等教育出版社，1988.

[6] 何伯和，空间解析几何，吉林大学出版社，1987.

[7] 山东省临沂等五所师专，解析几何，兰州大学出版社，1988.

[8] 吴光磊，丁石孙，姜伯驹，田畴等，解析几何，人民教育出版社，1979.

[9] 朱鼎勋，陈绍菱，空间解析几何学，北京师范大学出版社，1981.

[10] 邱维声，解析几何，北京大学出版社，1988.

[11] 华东师范大学数学系几何教研室，解析几何习题集，华东师大出版社，1981.

[12] 杨文茂，解析几何习题集，武汉大学出版社，1983.

[13] （前苏联）*A. B.* 波格列诺夫、姚志亭译，解析几何，人民教育出版社，1982.

[14] （苏）*B. T.* 巴兹列夫，李质朴译，几何学及拓扑学习题集，北京师范大学出版社，1985.

[15] 陈绍菱、傅若男，空间解析几何习题试析，北京师范大学出版社，1984.

[16] Iserge Lang, *Linear Algebra* (*second Edition*), *Columbia* u-

[17] N. N. ... oncepts of Topology, *The Math* , ...

[18] H. B. Griffiths, *Su.* ... university Press, 1981.

[19] 王敬庚,高等数学,Vol. 1,No. 1(1985).

[20] 安明道,高等数学,Vol. 1,No. 2(1985).

[21] 林向岩,高等数学,Vol. 2,No. 1(1986).

[22] 许安国,高等数学,Vol. 2,No. 2(1986).

[23] 陈及人,高等数学,Vol. 2,No. 2(1986).

[24] 杨秀良,高等数学,Vol. 3,No. 2(1987),74—77.

[25] 罗崇善,高等数学,Vol. 2,No. 3(1986),114—117.

[26] 何裕新,数学通报,No. 1(1987),14—15.

[27] 周忠义,数学通报,No. 8(1987),42—43.

[28] 潘洪亮,数学通报,No. 6(1990),33—35.

[29] 杨世国,数学通报,No. 4(1990),21—23.

[30] 易南轩,数学通报,No. 8(1990),29—30.

[31] 时承权等. 平面解析几何解题方法与技巧,黑龙江教育出版社,1988.

[32] 董世奎,平面解析几何的基本问题和思维方法,山西人民出版社,1986.

[General Information]
□□=□□□□□□□□
□□=□□□ □□□ □□□
□□=440
SS□=10069892
□□□□=1994□12□□1□